5B1140 F14

$$(a+b)^2 = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^k = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{n-k} n^{n-k} b^k \Rightarrow \binom{n}{k} = \binom{n}{n-k} \Rightarrow \binom{n}{n} = \binom{n}{0}$$

$$(a+b)^{n+1} = (a+b)(a+b)^n = (a+b)\left(\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^k\right) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k+1} b^k + \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^{k+1} =$$

$$= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n+1-k} b^k + \sum_{k=1}^{n+1} \binom{n}{k-1} a^{n+1-k} b^k = \sum_{k=0}^{n+1} \left(\binom{n}{k} + \binom{n}{k-1}\right) a^{n+1-k} b^k$$

$$\begin{array}{c}
1 \\
1 \quad 1 \\
1 \quad 2 \quad 1 \\
1 \quad 3 \quad 3 \quad 1 \\
1 \quad 4 \quad 6 \quad 4 \quad 1 \\
1 \quad 5 \quad 10 \quad 10 \quad 5 \quad 1 \\
1 \quad 6 \quad 15 \quad 20 \quad 15 \quad 6 \quad 1 \\
1 \quad 7 \quad 21 \quad 35 \quad 35 \quad 21 \quad 7 \quad 1 \\
1 \quad 8 \quad 28 \quad 56 \quad 70 \quad 56 \quad 28 \quad 8 \quad 1
\end{array}$$

<=> Det ger Pascals triangel!

SATS: $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$

Ex: $\binom{4}{2} = \frac{4\,!}{2\,!(4-2)!} = \frac{12}{2} = 6$

Funktioner:

Sammanssättning av funktioner:

$f_1 \circ f_2(x) = f_1(f_2(x))$

Ex: $\sin(x^2)$ => $f_1(x) = \sin(x)$ och $f_2(x) = x^2$

Vi behöver att $V_{f_2} \subseteq D_{f_1}$

Inversfunktioner:

$y = f(x)$ och $x = g(y)$ så är $x = f^{-1}(y)$

$f \circ f^{-1}(y) = f(f^{-1}(y)) = f(x) = y$

$f^{-1} \circ f(x) = f^{-1}(f(x)) = f^{-1}(y) = x$

¤ För att vi ska ha en invers krävs att varje y-värde kommer från högst ett x-värde.

Ex: $y = f(x) = x^2$ har ingen invers för tex $(-1)^2 = 1^2$

Ex: $y = f(x) = x^3$ f har en invers för varje y-värde svarar mot precis ett x-värde

Växande/Avtagande:
$f(x) \geq f(y)$ resp $f(x) \leq f(y)$ då $y < x$
Strängt växande/Strängt avtagande:
$f(x) < f(y)$ $\quad f(x) > f(y)$

Ex: $f(x) = x^3$ Strängt växande.
Ex: $f(x) = e^x$ Strängt växande.

SATS:
Om f är strängt växande eller strängt avtagande så har f invers.
Bevis:
¤ För att bevisa satsen räcker det att visa att $f(x) = f(y) \Leftrightarrow x = y$.
=> Antag att $f(x) = f(y)$ men $x \neq y$ tex $x > y$ vilket skulle ge
$f(x) > f(y)$ eller $f(x) < f(y)$ något som motsäger antagandet $f(x) = f(y)$. Alltså gäller
$x = y$.

Om vi har $y = f(x) \Leftrightarrow x = f^{-1}(y)$
så har vi $y = e^x \Leftrightarrow x = \ln(y)$

Periodiska funktioner:
$f(x+T) = f(x)$
Ex: $\sin(x+2\pi) = \sin(x)$ sinus har period 2π
Periodiska funktioner går ej att invertera eftersom $f(x+T) = f(x)$ men $x \neq x+T$.
För att invertera de trigonometriska funktionerna måste vi begräna deras defintionsmängder.

OBS! Sid 48-50 har bra bilder för detta. OBS!