5B1140 F15

¤ **Förenkla** $\arctan 2+\arctan 3$

Det är svårt att ta en vinkel för något av värderna. Tag istället *tangens* av hela uttrycket.

=> $\tan(\arctan 2+\arctan 3)=\dfrac{\tan(\arctan 2)+\tan(\arctan 3)}{1-\tan(\arctan 2)*\tan(\arctan 3)}=\dfrac{2+3}{1-2*3}=-1$

=> $\left(\tan\alpha=-1\Rightarrow\alpha=\dfrac{-\pi}{4}+\pi n\right)$ Tangens är pi-periodiskt...

=> $\arctan x\in\left(\dfrac{-\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right)\Rightarrow\arctan x+\arctan y\in(-\pi,\pi)$

$n=0 \quad \dfrac{-\pi}{4}\in(-\pi,\pi)$

=>

$n=1 \quad \dfrac{3\pi}{4}\in(-\pi,\pi)$

$n\neq 0,1$ ej okej!

¤ arctan **för något positivt värde ger ett positivt värde tillbaks!**

=> $\arctan 2+\arctan 3\in(0,\pi)\Rightarrow\arctan 2+\arctan 3=\dfrac{3\pi}{4}$

¤ **Lös ekvationen** $\arcsin x=2\arccos x$

$x=\sin(\arcsin x)=\sin(2\arccos x)=2\sin(\arccos x)\cos(\arccos x)=2\sin(\arccos x)x=2x\sqrt{1-x^2}$

$x=2x\sqrt{1-x^2}\underbrace{\Rightarrow}_{x\neq 0}\dfrac{1}{2}=\sqrt{1-x^2}\Rightarrow\dfrac{1}{4}=1-x^2\Rightarrow x^2=\dfrac{3}{4}\Rightarrow x=\dfrac{\pm\sqrt{3}}{2}$

Observera den tappade lösningen $x=0$

Testa lösningarna:

$x=0 \qquad 0=2\dfrac{\pi}{2}$ Inte OK

$x=\dfrac{\sqrt{3}}{2} \qquad \dfrac{\pi}{3}=2\dfrac{\pi}{6}$ OKEJ

$x=\dfrac{-\sqrt{3}}{2} \qquad \dfrac{-\pi}{3}=5\dfrac{\pi}{3}$ Inte OK

Lösningen är $x=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

Hyperboliska funktioner:

$\cosh x=\dfrac{e^x+e^{-x}}{2} \qquad \left(\cos\varphi=\dfrac{e^{i\varphi}+e^{-i\varphi}}{2}\right)$

$\sinh x=\dfrac{e^x-e^{-x}}{2} \qquad \left(\sin\varphi=\dfrac{e^{i\varphi}-e^{-i\varphi}}{2}\right)$

Övning: Verifiera att $\cosh^2 t-\sinh^2 t=1$

$\cosh^2 t-\sinh^2 t=\dfrac{e^{2t}+e^{-2t}+2}{4}-\dfrac{e^{2t}+e^{-2t}-2}{4}=\dfrac{4}{4}=1$ v.s.b

Övning: Skriv $\sinh t$ och $\cosh t$ som sammansatta funktioner där den ena funktionen är $f(x)=e^x$

$\cosh x = f_1 \cdot f_2(x)$ $\qquad$ $\sinh x = f_3 \cdot f_2(x)$

$f_2(x)=e^x$ $\qquad$ $f_2(x)=e^x$

$$f_1(x)=\frac{x+\frac{1}{x}}{2} \qquad f_3(x)=\frac{x-\frac{1}{x}}{2}$$

$$\arctan 2 \in \left(0\,,\ \frac{\pi}{2}\right) \qquad \arctan 3 \in \left(0,\ \frac{\pi}{2}\right)$$

Gränsvärden:

¤ **Def:** $\lim\limits_{x \Rightarrow a} f(x)=A$

Givet $\varepsilon>0$ ska det finnas $\delta>0$ så att om $0<|x-a|<\delta$ så blir $|f(x)-A|<\varepsilon$

¤ Tex för $f(x)=\frac{1}{x}$ existerar inte gränsvärdet $\lim\limits_{x \Rightarrow o} f(x)$

¤ $y=f(x)=\begin{Bmatrix} x+1 & x\le 1 \\ x & x>1 \end{Bmatrix}$

=> $\lim\limits_{x \Rightarrow 1^+} f(x)=1$

=> $\lim\limits_{x \Rightarrow 1^-} f(x)=2$

¤ **Def:** En funktion f kallas kontinuerlig i punkten a om $\lim\limits_{x \Rightarrow a} f(x)=f(a)$

Om f är en kontinuerlig i varje punkt i sin defintionsmängd kallas funktionen kontinuerlig.

Ex: Alla elementära uttryck är kontinuerliga.

=> $\lim\limits_{x \Rightarrow \frac{\pi}{2}} \cos x = \cos\frac{\pi}{2}=0$

¤ **SATS:** (Om mellanliggande värde)

¤ Om a och b är punkter i ett intervall där f är definierad och f är kontinuerlig i intervallet, så gäller det att f antar alla värden mellan $f(a)$ och $f(b)$ i intervallet.

Ex: $\sin\frac{\pi}{2}=1$ och $\sin\frac{-\pi}{2}=-1$ och sinus är definierad i intervallet $\left[\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ så den antar alla värden mellan -1 och 1 i det intervallet.

Ex: För $f(x)=\frac{1}{x}$ har vi $f(1)=1$ och $f(-1)=-1$ men f blir aldrig noll.

¤ **SATS:**

¤ På ett slutet begränsat intervall så antar en kontinuerlig funktion största och minsta värdena.

Ex: $f(x)=\dfrac{1}{x}$ antar inte något största värde på $(0,1]$.(går mot ∞)

Ex: $f(x)=\dfrac{1}{x}$ antar ett största och minsta värde i intervallet $[1,2]$.

Ex: $f(x)=\dfrac{1}{x}$ antar inte något minsta värde i $[1,\infty)$