5B1140 F17

Gränsvärden Fortsättning:

¤ $\lim_{x \Rightarrow a} f(x) = A \quad \Leftrightarrow \quad \lim_{k \Rightarrow \infty} f(x_k) = A$ för alla följder $\{x_k\}$ sådana att $\lim_{k \Rightarrow \infty} x_k = a$

¤ Gränsvärdet av $f(x)$ när $x \Rightarrow a$ existerar inte om det finns två talföljder som ger olika gränsvärden.

Ex: $\lim_{x \Rightarrow \infty} \sin x$ existerar inte för

$$x_k = \frac{\pi}{2} + 2\pi k \quad \Rightarrow \quad \lim_{k \Rightarrow \infty} \sin x_k = 1$$

$$y_k = \frac{-\pi}{2} + 2\pi k \quad \Rightarrow \lim_{k \Rightarrow \infty} \sin y_k = -1$$

Ex: $f(x) = \begin{Bmatrix} 1 & \text{om } x \text{ är rationellt} \\ 0 & \text{om } x \text{ är irrationellt} \end{Bmatrix}$

$\lim_{x \Rightarrow 0} f(x)$ existerar ej dr vi kan ta $\{x_k\}$ alla rationella så att $x_k \Rightarrow 0$ tex $x_k = \frac{1}{k}$

vilket ger $\lim_{k \Rightarrow \infty} f(x_k) = 1$ men om vi tar $\{y_k\}$ alla irrationella så att $y_k \Rightarrow 0$ tex $\frac{\sqrt{2}}{k}$

får vi $\lim_{k \Rightarrow \infty} f(y_k) = 0$

¤ **Gränsvärden** existerar om den tex är växande eller avtagande hela tiden.
¤ **Gränsvärden** existerar INTE för tex funktioner som "hoppar" -> inte går att dra med en linje.
¤ **Monotona** funtioner har gränsvärden. (egentliga eller oegentliga (∞)). Om f är växande och begränsad ovanifrånså blir gränsvärdet egentligt. *Inte så konstigt med tanke på att vi begränsar det ovanifrån => det inte kan bli hur stort som hellst.*

Definition av talet *e*

$$\lim_{n \Rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$$

¤ För att visa att gränsvärdet existerar ska vi visa att följden är äväxande och begränsad.

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \frac{1}{n^k} = \sum_{k=0}^{n} \frac{n!}{k!(n-k)!} * \frac{1}{n^k} = \sum_{k=0}^{n} \frac{n * \ldots * (n-(k-n))}{k!} * \frac{1}{n^k}$$

Fortsättning finns på sidan 421 i boken. FÖR KLART!

Vi ser att följden är växande.

¤ vi ser också att den första delen är mindre än 1 varför vi kan uppskatta det till

$$\leq \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} \leq \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{2^{k-1}} = \frac{1 - \frac{1}{2^n}}{1 - \frac{1}{2}} + 1$$ vilket är begränsat.

[geometrisk serie] $\left(G = \sum_{k=1}^{n} a^b \qquad aG - G = \sum_{k=1}^{n} a^{k+1} - \sum_{k=1}^{n} a^k \qquad (a-1\ )G = a^{n+1} - a \right)$

Derivata:

$f\,'(x) = \lim_{h \Rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$ om gränsvärdet existerar och är egentligt.

¤ **Geometrisk tolkning av derivatan är att den är lutingen hos tangenten.**

Ex: $f(x) = x$

=> $\lim_{h \Rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(h)}{h} = \lim_{h \Rightarrow 0} \frac{(x+h) - x}{h} = \lim_{h \Rightarrow 0} \frac{h}{h} = 1$

Ex: $f(x) = |x|$

=> $\lim_{h \Rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$

¤ För $x > 0$ är $|x| = x$ så $f\,'(x) = 1$

¤ För $x < 0$ är $|x| = -x$ så $f\,'(x) = -1$

=>Ingen entydig derivata varför gränsvärdet ej existerar.

SATS:

Om f är deriverbar i en punkt a så är f kontinuerlig i a . (Men som exemplet $f(x) = |x|$ visar gäller inte omvändningen)

Bevis:

Eftersom nämnaren går mot noll måste även täljaren gå mot noll, dvs $f(x+h) \Rightarrow f(x)$

Räkneregler (Allmänt)

¤ Vad kan man göra med derivata?

$(f \pm g)\,'(x) = f\,'(x) \pm g\,'(x)$

$(f * g)\,'(x) = f\,'(x) g(x) + f(x) * g\,'(x)$

$\left(\frac{f}{g} \right)'(x) = \frac{f\,'(x) g(x) - g\,'(x) f(x)}{(g(x))^2}$

$(cf)\,'(x) = c * f\,'(x)$

$(f * g)\,'(x) = f\,'(g(x)) * g\,'(x)$

$(f^{-1})\,'(x) = \frac{1}{f\,'(f^{-1}(x))}$

¤ *Hänvisning till boken sid 110 för fler deriveringsregler.*