5B1140 F18

Logaritmisk derivering:
¤ Inled med att ta logaritmen och sedan derivera

$$D(\ln f)=\frac{f\,'}{f}$$

$$D(\tan x)=\tan D(\ln\tan x)=\tan x\, D\left(\ln\left(\frac{\sin x}{\cos x}\right)\right)=\tan x\, D(\ln\sin x-\ln\cos x)=$$

$$=\tan x\,(D\ln\sin x-D\ln\cos x)\tan x\left(\frac{D\sin x}{\sin x}-\frac{D\cos x}{\cos x}\right)=$$

$$=\frac{\sin x}{\cos x}\left(\frac{\cos x}{\sin x}+\frac{\sin x}{\cos x}\right)=1\;+\frac{\sin^2 x}{\cos^2 x}=1+\tan^2 x$$

Implicit derivering:

Ex: $x^2+y^2=1$
¤ Delar vi upp funktionen i två halvplan så kan vi skriva funktionen som två funktioner:
$\pm y=\pm\sqrt{1-x^2}$
¤ Låt oss säga att vi vill bestämma $y\,'\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$
Vi vill derivera implicit
$0=D\left(x^2+(y(x))^2\right)=2x+2y(x)*y\,'(x)$
Det ger att $y\,'(x)=\frac{-x}{y}$

$$y\,'\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)=\frac{-\frac{1}{\sqrt{2}}}{y\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)}=\left\{\frac{-\frac{1}{\sqrt{2}}}{\frac{1}{\sqrt{2}}}=1 \quad \text{eller} \quad \frac{\frac{1}{\sqrt{2}}}{\frac{1}{\sqrt{2}}}=1\right\}$$

Ex: $\sin(xy)=\frac{1}{2}$ Skriv $y\,'$ uttryckt i x och y.

$$0=D\sin(xy(x))=\underbrace{\cos(xy(x))}_{\neq 0}(y+xy\,')\quad\Rightarrow\quad y\,'=\frac{-y}{x}$$

Att det inte får vara noll ovan är från $\sin(xy)=\frac{1}{2}$

Ex: $y^3+2y^2-3y+5x^5=0$ Uttryck y' som en funktion av x och y

$$3y^2 * y' + 4y * y' - 3 * y' - 25x^4 = 0$$

$$y'(3y^2+4y-3) = -25x^4 \quad \Rightarrow \quad y' = \frac{-25\ x^4}{3y^2+4y-3}$$

Högre derivator:

$D^2(\sin x) = D(D\sin x) = D\cos x = -\sin x$

$D^5\ x^5 = 5!$ varför? Ta $\left(D^4(5x^4)\right)$ och ta ner en derivata i taget. Det leder till svaret.

$D^n\, x^n = n!$

Ex: Verifiera att $y=\sin x$ och $y=\cos x$ uppfyller differentialekvationen $y''+y=0$

$D^2\ \sin x = -\sin x$ och $D^2\ \cos x = -\cos x$ => Stämmer!!

$D^2(f*g)(x) \Rightarrow D(f'g+fg') \Rightarrow f''g+2(f'g')+fg''$

SATS: $D^n(f*g)(x) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{n-k}(x)\, g^k(x)$ <u>Leibniz regel!</u>

- $D e^x = e^x$
- $D\sin x = \cos x$
- $D\cos x = -\sin x$

$D\cos x = D\sin(\frac{\pi}{2}-x) = \cos(\frac{\pi}{2}-x)*(-1) = -\sin x$ (Använd triangeln för att förstå cos => sin)

$$D e^x = \lim_{h\Rightarrow 0} \frac{e^{x+h}-e^x}{h} = e^x \lim_{h\Rightarrow 0} \frac{e^h-1}{h} = \left[s=e^h-1\ \right] = e^x \lim_{s\Rightarrow 0} \frac{s}{\ln(1+2)} = e^x \lim_{s\Rightarrow 0} \frac{1}{\ln((1+s)^{\frac{1}{s}})} = e^x * \frac{1}{\ln e}$$

Vilket ger svaret e^x

$$D\sin x = \lim_{h\Rightarrow 0} \frac{\sin(x+h)-\sin x}{h} = \lim_{h\Rightarrow 0} \frac{\sin x\cos h + \sin h\cos x - \sin x}{h} =$$

$$= \lim_{h\Rightarrow 0} \sin x\left(\frac{\cos h-1}{h}\right) + \cos x\left(\frac{\sin h}{h}\right) = \lim_{h\Rightarrow 0} \sin x\left(\frac{\cos^2 h-1}{h(\cos h+1\ )}\right) + cis\, x\frac{\sin h}{h} =$$

$$= \lim_{h\Rightarrow 0} \sin x\frac{-\sin^2 h}{h(\cos h+1)} + \cos x = \cos x$$

DifferensFormel:
$f(x+h)-f(x)=Ah+p(h)h \qquad$ där $\lim_{h \Rightarrow 0} p(h)=0$

Om f uppfyller formeln ovan för någon konstant A och funktion p kallas f differentierbar.

SATS: f är differentierbar omm f är deriverbar och A=f(x)

Def: $df=f'(x)dx \qquad$ är $f:s$ differential

$$\frac{df}{dx}=f'(x)$$

Bevis av kedjeregeln: $(f*g)'(x)=f'(g(x))g'(x)$
Låt $\Delta g=g(x+h)-g(x)$

$$\left(\lim_{\Delta x \Rightarrow 0} \frac{\Delta F}{\Delta x}=\lim_{\Delta x \Rightarrow 0} \frac{\Delta F}{\Delta g}*\frac{\Delta g}{\Delta x}\right)$$

$$\lim_{h \Rightarrow 0} \frac{f(g(x+h))-f(g(x))}{h}=\lim_{h \Rightarrow 0} \frac{f'(g(x))\Delta g(x)+\rho(\Delta g)\Delta g}{h}=$$

$$=\lim_{h \Rightarrow 0} \left(f'(g(x))+\rho(\Delta g)\right)*\frac{\Delta g}{h}=f'(g(x))g'(x)$$