Extremvärden

x_0 är en lokal maximipunkt om $f(x_0) \geq f(x)$ för x i en omgivning av x_0.

x_0 är en global maximipunkt om $f(x_0) \geq f(x)$ för alla x i D_f.

Motsvarande gäller för minimipunkter. Ett samlingsnamn är extrempunkter.

strängt   strängt

Sats (I) f växande / avtagande i ett öppet intervall I

$$\iff f' \underset{>}{\geq} 0 \,/\, \underset{<}{\leq} 0$$

Sats (II) f konstant $:I$

$\Leftrightarrow \quad f'(x) = 0 \; : I$

Sats (III) Om x_0 är en lokal extrempunkt till en deriverbar funktion f $\Longrightarrow f'(x_0) = 0$

$\cancel{\Longleftarrow}$

(tex $f(x) = x^3$)

Sats $\boxed{\text{IV}}$ f är konkav/konvex i ett öppet intervall I

$$\Longleftrightarrow$$

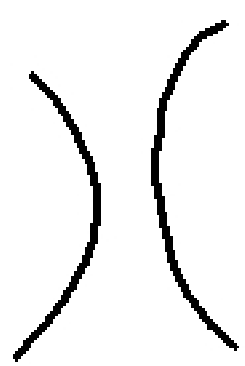
$f'' \leq 0$ i I $\qquad$ $f'' \geq 0$ i I

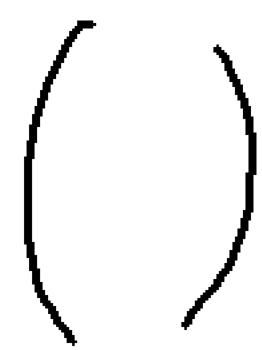
$-x^2$

konkav

x^2

konvex





Sats (V) Om $f'(x_0)=0$ och $f''(x_0)>0$ är x_0 en lokal minimipunkt, om $f''(x_0)<0$ är x_0 en lokal maximipunkt.

(Om $f''(x_0)=0$ vet man ej vad det blir. Behöver inte vara en extrempunkt)

Sats ($\boxed{VI}$) Om x_0 är en lokal extrempunkt till f i ett slutet intervall $[a,b]$ så gäller ett av följande

(i) $f'(x_0)=0$ (x^2 i $[-1,1]$, $x_0=0$)

(ii) x_0 är en av ändpunkterna (tex: $f(x)=x$ i $[-1,1]$)

(iii) derivatan är ej definierad i x_0 (tex: $f(x)=|x|$ $x=0$ är minimipunkt)

- $f(x) = x^3$

  $x = 0$ är en terrasspunkt

x			0		
f	↗	↗		↗	↗
f'	$+$	$+$	0	$+$	$+$

- $f(x) = x^4$

  $x=0$ minimipunkt

x				0			
f	↘	↘				↗	↗
f'	$-$	$-$	$-$	0	$+$	$+$	$+$

Bevis: (I) $f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$

Om f växande och $h>0$

blir $f(x+h) \geq f(x)$ så

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h} \geq 0$$

och därmed även

$$f'(x) = \lim_{h \to 0^+} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} \geq 0$$

PSS för 0^-.

(II) f konstant $\Leftrightarrow$ f både växande och avtagande

$\Leftrightarrow$ $f'(x) \geq 0$ och $f'(x) \leq 0$

$\Leftrightarrow$ $f(x) = 0$

(III)

(IV) konkav $\Rightarrow$ f' avtagande $\Rightarrow$ $f'' \leq 0$

konvex $\Rightarrow$ f växande $\Rightarrow$ $f'' \geq 0$

(V) $f''(x_0) > 0 \Rightarrow \lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f'(x) - f'(x_0)}{x - x_0} > 0$

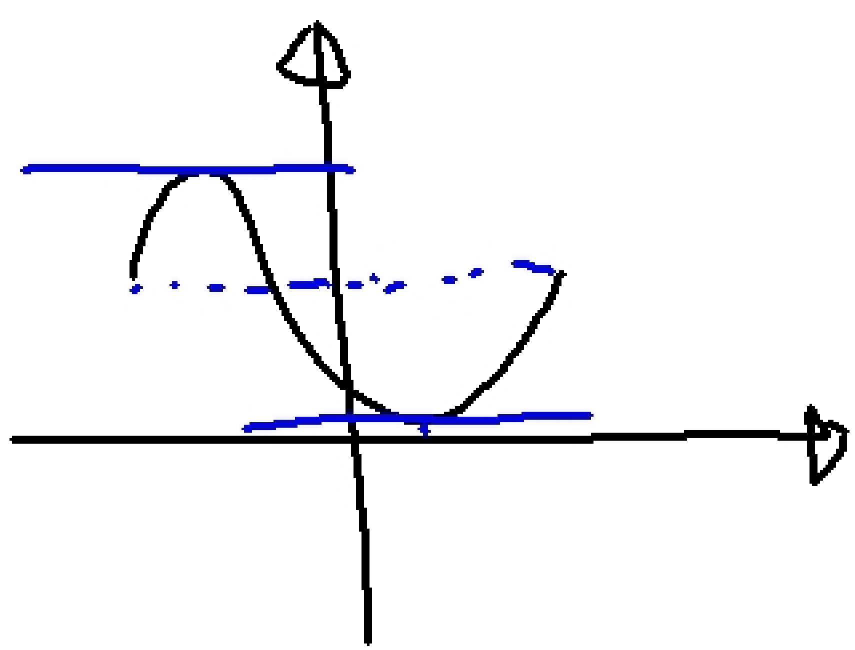
$f'(x_0) = 0$

$\Rightarrow \lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f'(x)}{x - x_0} > 0$

		x_0	
f'	$-\ -$	0	$+\ +$
f	$\searrow\ \searrow$		$\nearrow\ \nearrow$

så vi får en minimi-punkt.

Rollessats: Om f är deriverbar i intervallet (a,b) och kontinuerlig i $[a,b]$ och $f(a)=f(b)$ så finns minst en punkt $x \in (a,b)$ sådan att $f'(x)=0$.



Bevis: Om f konstant är derivatan noll i (a,b) och då kan vi ta x var som helst i intervallet.

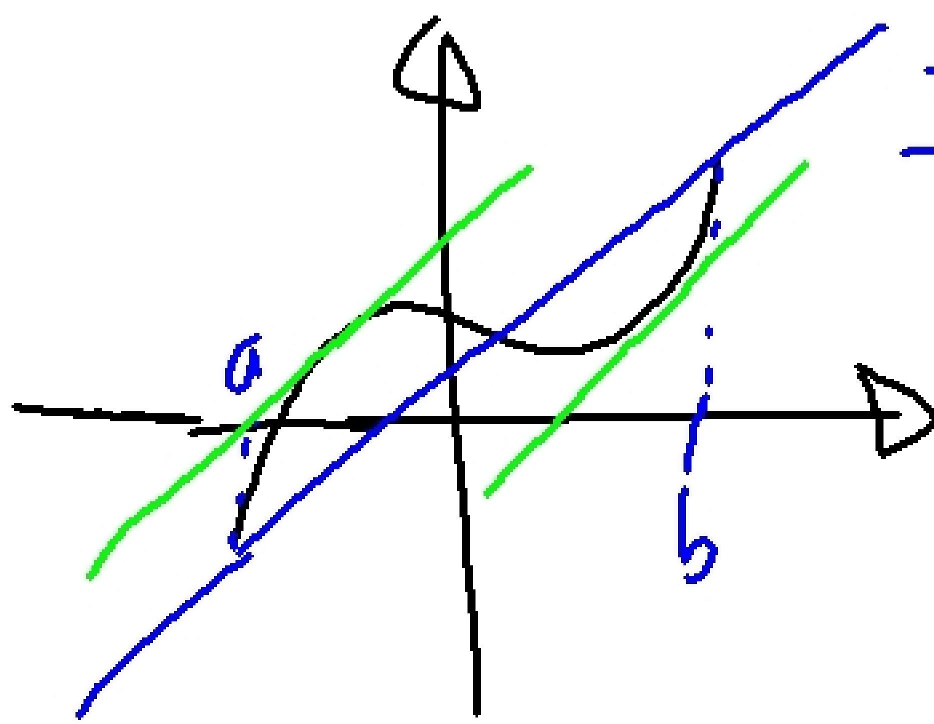
Om den inte är konstant använder vi att antar sitt största och minsta värde. I dessa punkter gäller antingen att $f'=0$ eller att de är ändpunkter. (Sats VI)

Om största och minsta värdena antas i ändpunkterna måste f vara konstant eftersom antagandet $f(a) = f(b)$ då ger att störstavärdet = minsta värdet. Eftersom en konstant funktion har derivatan $= 0$ är vi klara.

Differentialkalkylens medelvärdessats:

Om f är deriverbar i (a,b) och kontinuerlig i $[a,b]$, så finns en punkt $c \in (a,b)$ så att

$$f(b) - f(a) = f'(c)(b-a)$$



$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

Bevis: Låt $F(x) = f(x) - f(a) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a)$.

$$F(a) = 0 = F(b)$$

Rollessats ger nu en punkt c där $F'(c) = 0$.

$$F'(x) = f'(x) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

$$0 = F'(c) = f'(c) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

VSV

Ex: Visa att $(1+x)^r > 1+rx$ för $r>1$ och $x \geq 0$.

För att visa detta använder vi satsen med $a=0$ och $b=x$, $f(x)=(1+x)^r$ ger $(1+x)^r - 1 = r\underbrace{(1+c)^{r-1}}_{>1} x$ där $c \in (0,x)$.

$\Rightarrow (1+x)^r > rx+1$.

Övn: Bestäm de lokala extrempunkterna till

$$f(x) = 3x^2 - x^3 - 5$$