Taylors formel

Tangenten i punkten $x=a$ till f $\quad p_1(x) = f(a) + f'(a)(x-a)$

$p_1(x)$ har grad 1, polynom

Vi har $p_1(a) = f(a)$ och $p_1'(a) = f'(a)$

Sats (Taylors formel):

Om f har derivator upp till ordning $n+1$ har vi:

$$f(x) = \underbrace{f(a) + f'(a)(x-a) + \ldots + f^{(n)}(a)\frac{(x-a)^n}{n!}}_{\text{Taylorpolynom av grad } n}$$

$$+ \underbrace{f^{(n+1)}(\xi)\frac{(x-a)^{n+1}}{(n+1)!}}_{\text{restterm}} \quad \text{där } \xi \in (a,x)$$

någon punkt

$$P_1(x) = f(a) + f'(a)(x-a)$$

$$R_1(x) = f(x) - P_1(x)$$

$$F_1(t) = R_1(t)(x-a)^2 - R_1(x)(t-a)^2$$

Vi ser att $F_1(a) = 0$, $F_1(x) = 0$

$$F_1'(t) = R_1'(t)(x-a)^2 - 2R_1(x)(t-a)$$

så $F_1'(a) = 0$

Eftersom $F_1(a)$ och $F_1(x) = 0$ ger Rolles sats att det finns en punkt c mellan a och x så att $F_1'(c) = 0$. Då även $F_1'(a) = 0$ (se förra sidan) kan vi använda Rolles sats en gång till och får då en punkt d mellan a och c så att $F_1''(d) = 0$.

$$F_1''(t) = R_1''(t)(x-a)^2 - 2R_1(x)$$

så $$R_1''(d)(x-a)^2 - 2R_1(x) = 0$$

vilket ger

$$R_1(x) = \frac{R_1''(d)(x-a)^2}{2} =$$

$$= \frac{f''(d)(x-a)^2}{2} \quad \square$$

Ex: $\sin x = x + (-\sin d)\frac{x^2}{2}$

där $d \in (0, x)$

$x = \frac{1}{10}$ $\left|-\sin d \frac{x^2}{2}\right| \leq \frac{1}{200}$

$x = 10$ $\left|-\sin d \frac{x^2}{2}\right| \leq 50$

Utveckling kring $a=0$ kallas MacLaurins formel:

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + \dots + f^{(n)}(0)\frac{x^n}{n!} + f^{(n+1)}(d)\frac{x^{n+1}}{(n+1)!} \quad \text{där } d \in (0,x)$$

Vi kan få Taylors formel från MacLaurins formel genom att ta $g(t) = f(t+a)$ $\quad x = t+a$

$$g(t) = g(0) + g'(0)t + \dots g^{(n)}(0)\frac{t^n}{n!} + $$
$$+ g^{(n+1)}(d)\frac{t^{n+1}}{(n+1)!}$$

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \dots + f^{(n)}(a)\frac{(x-a)^n}{n!}$$
$$+ f^{(n+1)}(d+a)\frac{(x-a)^{n+1}}{(n+1)!}$$

Ex: $\sin x$ och $\cos x$ till ordning 5, e^x till ordning 3. MacLaurinutvecklingar.

$$\sin x = x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} + (-\sin d_1)\frac{x^6}{6!}$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + (-\cos d_2)\frac{x^6}{6!}$$

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + e^{d_3}\frac{x^4}{24}$$

där d_i är en punkt mellan 0 och x.

Ordobegreppet:

$$R_n(x) = O((x-a)^{n+1})$$

$$\Longleftrightarrow$$

$$\left| \frac{R_n(x)}{(x-a)^{n+1}} \right| \leq K \quad \text{nära } x = a$$

Ex:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{x + O(x^2)}{x}$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{x}{x} + \lim_{x\to 0} O(x) = 1 = 1$$

Ex: $$\lim_{x\to 0}\frac{e^{x^2}-1}{x^2} = \lim_{x\to 0}\frac{1 + x^2 + O(x^2) - 1}{x^2}$$

$$\left(D^2 e^{x^2} = D\left(2x e^{x^2}\right) = 2e^{x^2} + 4x^2 e^{x^2}\right)$$