Maclaurinutveckling

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + O(x^{n+1})$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \dots + (-1)^{n-1}\frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} + O(x^{2n})$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \dots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + O(x^{2n+1})$$

$$(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \alpha(\alpha-1)\frac{x^2}{2!} + \dots + \alpha\cdot(\alpha-1)\dots(\alpha-n+1)\frac{x^n}{n!} + O(x^{n+1})$$

Ex: $\sqrt{1+x} = 1 + \frac{1}{2}x + \left(\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{1}{2}\right)\frac{x^2}{2!}$
$+ \left(\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{3}{2}\right)\frac{x^3}{3!} + O(x^4)$

<u>Sats (entydighet)</u>:

Om f är en $n+1$ ssr kontinuerligt deriverbar funktion och

$$f(x) = p(x) + O(x^{n+1}) \quad \text{där grad } p \leq n$$

då är $p(x)$ Maclaurin polynomet av ordning n.

Ex: MacLaurinutveckla $e^x \sin x$ till ordning 3

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + O(x^4)$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + O(x^4)$$

$$\left(1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + O(x^4)\right)\left(x - \frac{x^3}{3!} + O(x^4)\right) =$$

$$= x - \frac{x^3}{3!} + x^2 + \frac{x^3}{2!} + O(x^4) = x + x^2 + \frac{x^3}{3} + O(x^4)$$

är därför MacLaurinutvecklingen

Ex: Maclaurinutveckla $\cos^2 x$ till ordning 6.

$$\cos^2 x = \left(1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + O(x^8)\right)^2$$

$$= 1 + \frac{x^4}{4} - 2\frac{x^2}{2!} + 2\frac{x^4}{4!} - 2\frac{x^6}{6!} - 2\frac{x^6}{2!4!}$$

$$+ O(x^8) = 1 - x^2 + \frac{1}{3}x^4 - \frac{16x^6}{15 \cdot 4!} + O(x^8)$$

$$D^2 \cos^2 x \Big|_{x=0} = -2$$

$$D \cos^2 x = -2\cos x \sin x$$

$$D^2 \cos^2 x = 2\sin^2 x - 2\cos^2 x$$

Bevis av entydighetssatsen:

Om $f(x) = p(x) + O(x^{n+1})$

och $f(x) = p_n(x) + O(x^{n+1})$

Maclaurinpolynomet av grad n

$$0 = \underbrace{p(x) - p_n(x)}_{\text{grad} \leq n} + O(x^{n+1})$$

$\Rightarrow$ $p(x) = p_n(x)$

eftersom differensen är $O(x^{n+1})$ men grad $\leq n$.

$$\lim_{x \to 0} \frac{e^{x^2} - 1}{x^2} = \lim_{x \to 0} \frac{1 + x^2 + O(x^4) - 1}{x^2} = 1$$

$$e^t = 1 + t + O(t^2)$$

$$t = x^2$$

$$e^{x^2} = 1 + x^2 + O(x^4)$$

Med L'Hôpitals regel

$$\lim_{x \to 0} \frac{e^{x^2} - 1}{x^2} = \lim_{x \to 0} \frac{\cancel{2x} e^{x^2}}{\cancel{2x}} = 1$$

L'Hôpitals regel:

Om gränsvärdet $\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)}$

är av typen "$\frac{0}{0}$" eller "$\frac{\infty}{\infty}$"

och $\lim_{x \to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ existerar

då gäller det att $\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$

Ex: $\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = \lim_{x \to 0} \frac{\cos x}{1} = 1$

Ex: $\lim_{x \to \infty} \frac{\sin x + x}{x} = \lim_{x \to \infty} \frac{\cos x + 1}{1}$

men $\lim_{x \to \infty} \cos x$ existerar ej!

Däremot existerar $\lim_{x \to \infty} \frac{\sin x + x}{x}$

för $\lim_{x \to \infty} \frac{\sin x}{x} = 0$

Sats (Cauchys medelvärdessats)

Om f och g är deriverbara i (a,b) och kontinuerliga i $[a,b]$ och $g' \neq 0$ i (a,b), så finns en punkt $c \in (a,b)$ så att

$$\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}$$

(fallet $g(x)=x$ ser den vanliga medelvärdessatsen)

Bevis av L'Hôpital:

Om $\frac{f(x)}{g(x)} \to \frac{0}{0}$ när $x \to a$

ger Cauchys medelvärdes-
sats att det finns en punkt
c så att

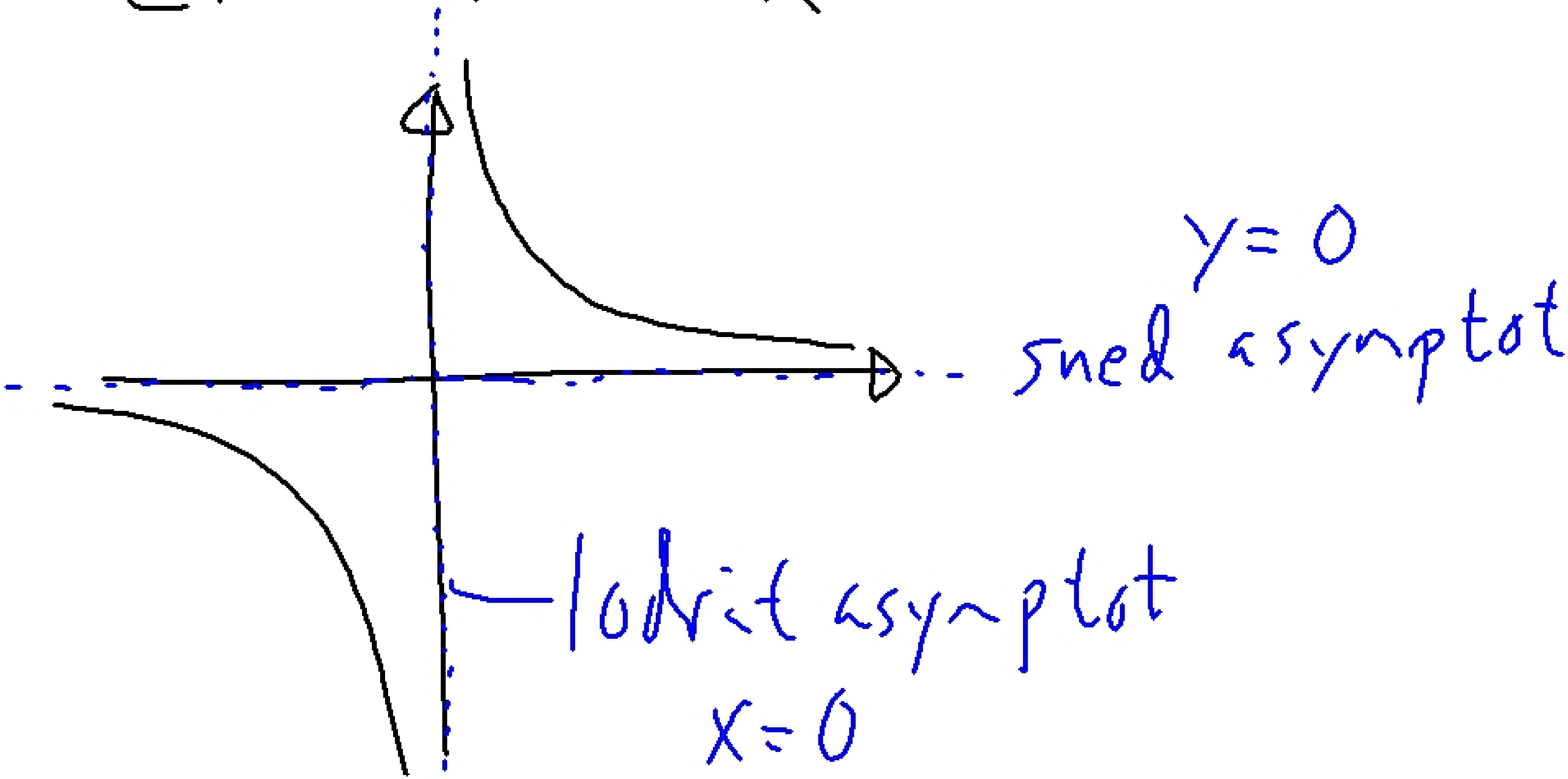
$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f'(c)}{g'(c)} \quad \text{där } c \in (a,x)$$

När $x \to a$ går även $c \to a$ så

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{c \to a} \frac{f'(c)}{g'(c)}$$

Asymptoter

Ex: $f(x) = \frac{1}{x}$



lodrät asymptot:

linjen $x=c$ är en lodrät asymptot till f om $\lim\limits_{x \to c^+} f(x) = \pm\infty$

$(x \to c^-)$

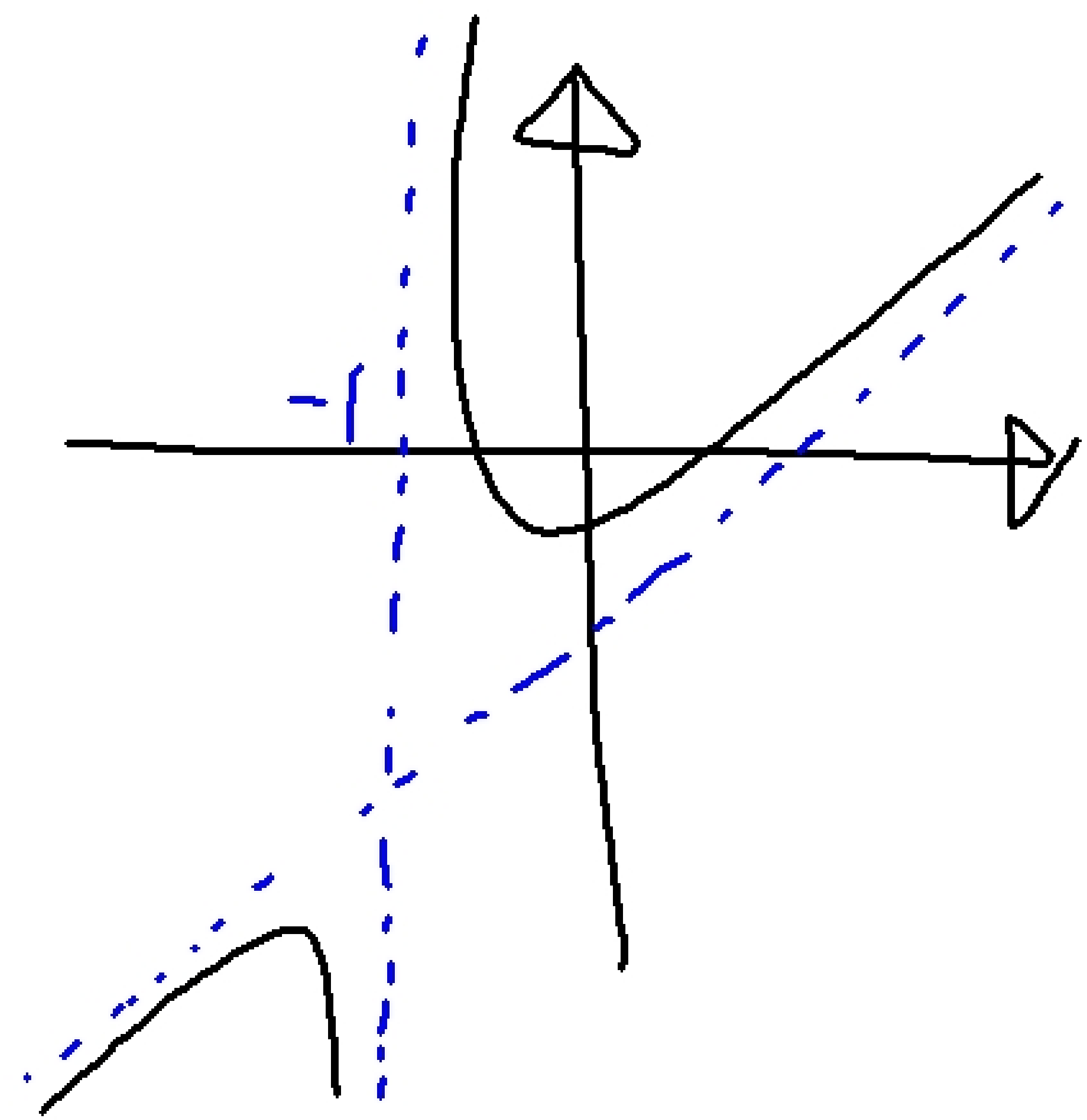
Sned asymptot:

linjen $y=ax+b$ är en sned asymptot om

$$\lim_{x \to \pm\infty} f(x) - ax - b = 0$$

Ex: $\dfrac{x^2-2x+3}{x+1}$ har lodrät asymptot $x=-1$ och sned asymptot $y=x-3$

$$\frac{x^2-2x+3}{x+1} = x-3 + \frac{6}{x+1}$$



För att hitta sneda asymptoter kan man använda sig av att

$$\lim_{x \to \infty} \frac{f(x)}{x} = a \quad \text{och}$$

$$\lim_{x \to \infty} f(x) - ax = b$$

Ex: $\sqrt{x^2+2x+1}$

$$\lim_{x \to \infty} \frac{\sqrt{x^2+2x+1}}{x} = 1, \quad \lim_{x \to -\infty} \frac{\sqrt{x^2+2x+1}}{x} = -1$$

$$\lim_{x\to\infty} \sqrt{x^2+2x+1} - x = \lim_{x\to\infty} \frac{\cancel{x^2}+2x+1-\cancel{x^2}}{\sqrt{x^2+2x+1}+x}$$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{2x}{\sqrt{x^2+2x+1}+x} = \lim_{x\to\infty} \frac{2}{\sqrt{1+\frac{2}{x}+\frac{1}{x^2}}+1} = 1$$

$$\lim_{x\to-\infty} \sqrt{x^2+2x+1} + x =$$

$$= \lim_{x\to-\infty} \frac{\cancel{x^2}+2x+1-\cancel{x^2}}{\sqrt{x^2+2x+1}-x} = \lim_{x\to-\infty} \frac{2x+1}{-x\left(\sqrt{1+\frac{2}{x}+\frac{1}{x^2}}+1\right)}$$

$$= -1$$

Vi får därmed de sneda asymptoterna

$$y = x + 1$$

$$y = -x - 1$$

$$\sqrt{x^2+2x+1} = \sqrt{(x+1)^2} = |x+1|$$