Differentialekvationer

Linjär homogen ekvation

$$(*) \quad y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + \dots + a_0 y = 0$$

Ex: $y'' + 2y' - 8y = 0$

e^{-4x} är en lösning

e^{2x} är också en lösning

$r^2 + 2r - 8 = 0 \quad r = 2, -4$

Antas att r_0 är en lösning till den karakteristiska ekvationen

$$r^n + a_{n-1} r^{n-1} + \dots + a_0 = 0$$

då är $e^{r_0 x}$ en lösning till ekvationen (*). Vi testar

$$D^n e^{r_0 x} + a_{n-1} D^{n-1} e^{r_0 x} + \dots + a_0 e^{r_0 x} =$$

$$= (r_0^n + a_{n-1} r_0^{n-1} + \dots + a_0) e^{r_0 x} = 0.$$

$y'' + 2y' - 8y = 0$ har även lösningarna $Ae^{-4x} + Be^{2x}$ där A och B är godtyckliga konstanter.

$$D^2(Ae^{-4x} + Be^{2x}) + 2D(Ae^{-4x} + Be^{2x}) -$$
$$- 8(Ae^{-4x} + Be^{2x}) = AD^2e^{-4x} + BD^2e^{2x} +$$
$$+ 2ADe^{-4x} + 2BDe^{2x} - 8Ae^{-4x} - 8Be^{2x} =$$
$$= A(D^2e^{-4x} + 2De^{-4x} - 8e^{-4x}) + B(D^2e^{2x} + 2De^{2x} - 8e^{2x}) = 0$$

Superpositionsprincipen

Om $y_1, \ldots, y_k$ är lösningar till en linjär homogen ekvation så är även

$$A_1 y_1 + \ldots + A_k y_k$$

en lösning för godtyckligt val av konstanter $A_1, \ldots, A_k$.

<u>Sats</u>: Den allmänna lösningen till en linjär homogen ekvation som (*) kan skrivas

$$y(x) = A_1 y_1(x) + \ldots + A_n y_n(x)$$

där n är ekvationens ordning och $y_1, \ldots, y_n$ är linjärt oberoende lösningar.

Ex: $e^{-4x} \neq A e^{2x}$ så de är linjärt oberoende

Det ger att

$$y = Ae^{-4x} + Be^{2x}$$

är den allmänna lösningen till ekvationen $y'' + 2y' - 8y = 0$.

Ex: Bestäm allmänna lösningen till ekvationen $y'' - y' - 6y = 0$

SVAR: $y = Ae^{3x} + Be^{-2x}$

$r^2 - r - 6 = 0 \Leftrightarrow r_1 = 3,\ r_2 = -2$

Ex: Finn allmänna lösningen till ekvationen $y'' + 2y' + y = 0$.

SVAR: $r^2 + 2r + 1 = 0$

$r = -1$ är en dubbelrot.

Det ger bara lösningar Ae^{-x}

För att hitta ytterligare en lösning ansätter vi $y = xe^{-x}$. Verifiera att det är en lösning!

$$D(xe^{-x}) = e^{-x} - xe^{-x}$$

$$D^2(xe^{-x}) = -e^{-x} - e^{-x} + xe^{-x} = -2e^{-x} + xe^{-x}$$

$$D^2(xe^{-x}) + 2D(xe^{-x}) + xe^{-x} =$$

$$\cancel{-2e^{-x}} + \cancel{xe^{-x}} + \cancel{2e^{-x}} - \cancel{2xe^{-x}} + \cancel{xe^{-x}} = 0$$

Så allmänna lösningen blir

$$y = Ae^{-x} + Bxe^{-x}$$

SATS: Om r_0 är en rot med multiplicitet m till den karakteristiska ekvationen så är

$$y = P_m(x)\, e^{r_0 x}$$

vara en lösning till differentialekvationen där $P_m(x)$ är ett godtyckligt polynom av grad $m-1$.

Ex: Finn alla lösningar till ekvationen $y''' - 3y'' + 3y' - y = 0$.

$$r^3 - 3r^2 + 3r - 1 = 0$$

$$(r-1)^3 = r^3 - 3r^2 + 3r - 1$$

$r = 1$ trippelrot.

$$y = Ae^x + Bxe^x + Cx^2e^x$$

Ex: Finn allmänna lösningen till ekvationen $y'' + y = 0$.

(Skriv svaret med reella funktioner)

SVAR: Karakteristiska ekvationen

$$r^2 + 1 = 0 \Leftrightarrow r = \pm i$$

vilket ger e^{ix} resp e^{-ix}.

$$Ae^{ix} + Be^{-ix} =$$

$$A\cos x + iA\sin x + B\cos x - iB\sin x =$$

$$= \underbrace{(A+B)}_{C}\cos x + \underbrace{(iA-iB)}_{D}\sin x =$$

$$= C\cos x + D\sin x.$$

Inhomogena ekvationer

$$(**) \qquad y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \dots + a_0 y = f(x)$$

Ex: $\quad y'' + 2y' - 8y = 7$

En lösning t.ex $y = -\frac{7}{8}$.

Ex: Lös ekvationen

$$y'' + 2y' - 8y = 5x$$

Ansätt $y = ax + b = -\frac{5}{8}x - \frac{5}{32}$

$y'' = 0$, $y' = a$

$$y'' + 2y' - 8y = 2a - 8(ax + b)$$

$$\begin{cases} -8a = 5 \\ 2a - 8b = 0 \end{cases} \qquad \begin{aligned} a &= -\frac{5}{8} \\ b &= \frac{a}{4} = -\frac{5}{32} \end{aligned}$$

Det här ger oss en lösning.

Fler lösningar fås genom att lägga till lösningar till den homogena ekvationen.

Tex: $y = \underbrace{-\frac{5}{8}x - \frac{5}{32}}_{y_p} + e^{-4x}$

$$y'' + 2y' - 8y = \overbrace{y_p'' + 2y_p' - 8y_p}^{5x} + \underbrace{D^2(e^{-4x}) + 2De^{-4x} - 8e^{-4x}}_{=0} = 5x + 0 = 5x$$

Antas att y_{p_1} och y_{p_2} är två lösningar till ekvationen

$$y'' + 2y' - 8y = 5x.$$

Låt oss betrakta $y_d = y_{p_1} - y_{p_2}$.

Vi får

$$y_d'' + 2y_d' - 8y_d = (y_{p_1} - y_{p_2})'' +$$

$$+ 2(y_{p_1} - y_{p_2})' - 8(y_{p_1} - y_{p_2}) =$$

$$y_{p_1}'' + 2y_{p_1}' - 8y_{p_1} - y_{p_2}'' - 2y_{p_2}' + 8y_{p_2} = 5x - 5x = 0$$

Differensen mellan två lösningar till en inhomogen ekvation är alltså en lösning till motsvarande homogena ekvation. Den allmänna lösningen till en inhomogen ekvation (**) blir så

$$y = y_p + y_h$$

partikulär lösning

allmänna lösningen till den homogena

Den allmänna lösningen till $y'' + 2y' - 8y = 5x$ blir därmed

$$y = -\frac{5}{8}x - \frac{5}{32} + Ae^{-4x} + Be^{2x}$$

Ex: $y'' + 2y' + y = x^2 + 1$

$$y_p = ax^2 + bx + c$$

$$y_p' = 2ax + b$$

$$y_p'' = 2a$$

$$\begin{cases} a = 1 \\ b + 4 = 0 \\ 2 - 8 + c = 1 \end{cases}$$

Eftersom allmänna lösningen till motsvarande homogena ekvation är $Ae^{-x} + Bxe^{-x}$ får vi att

$$y = x^2 - 4x + 7 + Ae^{-x} + Bxe^{-x}$$

är allmänna lösningen till

$$y'' + 2y' + y = x^2 + 1.$$