Förskjutningsregeln

Ex: $y'' - 3y' + 2y = e^{2x}$

Ansätter vi: $y_p = ae^{2x}$

får vi:

$$y_p'' = 4ae^{2x}, \quad y_p' = 2ae^{2x}$$

så

$$y_p'' - 3y_p' + 2y_p = 4ae^{2x} - 6ae^{2x} + 2ae^{2x} =$$

$$= 0$$

y_p lösning till homogena ekvationen

Det här är ett exempel på resonans.

Låt oss byta ansättning till

$$y_p = z(x)e^{2x}$$

det ger

$$y_p' = z'(x)e^{2x} + 2z(x)e^{2x}$$

$$y_p'' = z''(x)e^{2x} + 4z'(x)e^{2x} + 4z(x)e^{2x}$$

$$y_p'' - 3y_p' + 2y_p = z''e^{2x} + 4z'e^{2x} + \cancel{4ze^{2x}} - 3z'e^{2x} - \cancel{6ze^{2x}} + \cancel{2ze^{2x}} = (z'' + z')e^{2x}$$

Vi vill ha

$$y_p'' - 3y_p' + 2y_p = e^{2x}$$

så

$$z'' + z' = 1.$$

Tex $z = x$. Alltså $y_p = xe^{2x}$ är en partikulärlösning.

När vi deriverar ze^{2x} får vi $D(ze^{2x}) = (Dz)e^{2x} + 2ze^{2x} =$

$$= ((D+2)z)e^{2x}$$

Vi har därför att om

$y_p = z e^{2x}$ och

$D^2 y_p - 3 D y_p + 2 y_p = e^{2x}$

får vi

$$(D+2)^2 z - 3(D+2) z + 2z = 1$$

$$1 = (D^2 + 4D + 4) z - 3Dz - 6z + 2z =$$

$$= D^2 z + Dz$$

Ex: $y'' + y = \cos x = \operatorname{Re} e^{ix}$

Betrakta därför

$$z'' + z = e^{ix}$$

(Realdelen av en lösning z ger en lösning y till ekvationen högst upp)

Resonans eftersom e^{ix} löser $z'' + z = 0$.

Vi sätter därför $z_p = u e^{ix}$ och använder förskjutnings-regeln $D \longrightarrow D+i$

så

$$z'' + z = e^{ix}$$

ger $(D+i)^2 u + u = 1$

dvs $D^2 u + 2iDu = 1$

exempelvis $u = -\frac{ix}{2}$.

$u = ax$
$D^2 u = 0$
$Du = a$
$2iDu = 2ia$
så $a = \frac{1}{2i} = -\frac{i}{2}$

En partikulär lösning till

$$z'' + z = e^{ix}$$

är därmed $-\frac{ix}{2}e^{ix}$

och vi får att en partikulär lösning till

$$y'' + y = \cos x$$

ges av $\mathrm{Re}\left(-\frac{ix}{2}e^{ix}\right) = \mathrm{Re}\left(-\frac{ix}{2}(\cos x + i\sin x)\right)$

$$= \frac{x}{2}\sin x$$

Ex: $y'' + 2y' + y = 0$ (ingen resonans)

$$r^2 + 2r + 1 = 0$$

$r = -1$ dubbelrot

så en lösning är e^{-x}.

För att hitta ytterligare en lösning kan vi sätta

$$y = ze^{-x}$$

$$D \to D - 1$$

$$D^2y + 2Dy + y = 0$$

$$(D-1)^2 z + 2(D-1)z + z = 0$$

$$D^2 z = 0$$

Tex $z = x$ vilket ger lösningen $y = xe^{-x}$.

Ex (allmänt med dubbelrot):

Antag att r är en dubbelrot till $r^2 + a_1 r + a_0 = 0$

då är e^{rx} är en lösning till

$$y'' + a_1 y' + a_0 y = 0.$$

För att hitta en till lösning sätter vi $y = z e^{rx}$.

Förskjutningsregeln säger att

$$D \to D + r$$

$$(D+r)^2 z + a_1 (D+r) z + a_0 z = 0$$

$$D^2 z + \underbrace{(2r + a_1)}_{=0} D z + \underbrace{(r^2 + a_1 r + a_0)}_{=0} z = 0$$

för r dubbelrot

$$\Leftrightarrow \quad D^2 z = 0$$

så tex $z = x$. Alltså får vi en ny lösning $y = xe^{rx}$.

Ex: $y'' - 3y' + 2y = x \sin 4x = \operatorname{Im}(xe^{i4x})$

$$z'' - 3z' + 2z = xe^{i4x}$$

För att hitta en partikulär-lösning sätter vi $z = ue^{i4x}$.

Förskjutningsregeln ger då

$$(D+4i)^2 u - 3(D+4i)u + 2u = x$$

$$D^2 u + (8i - 3)Du + (-16 - 12i + 2)u = x$$

Sätter vi $u = ax + b$ får vi

$$\begin{cases} (-14-12i)a = 1 \\ (8i-3)a + (-14-12i)b = 0 \end{cases}$$

och det ger

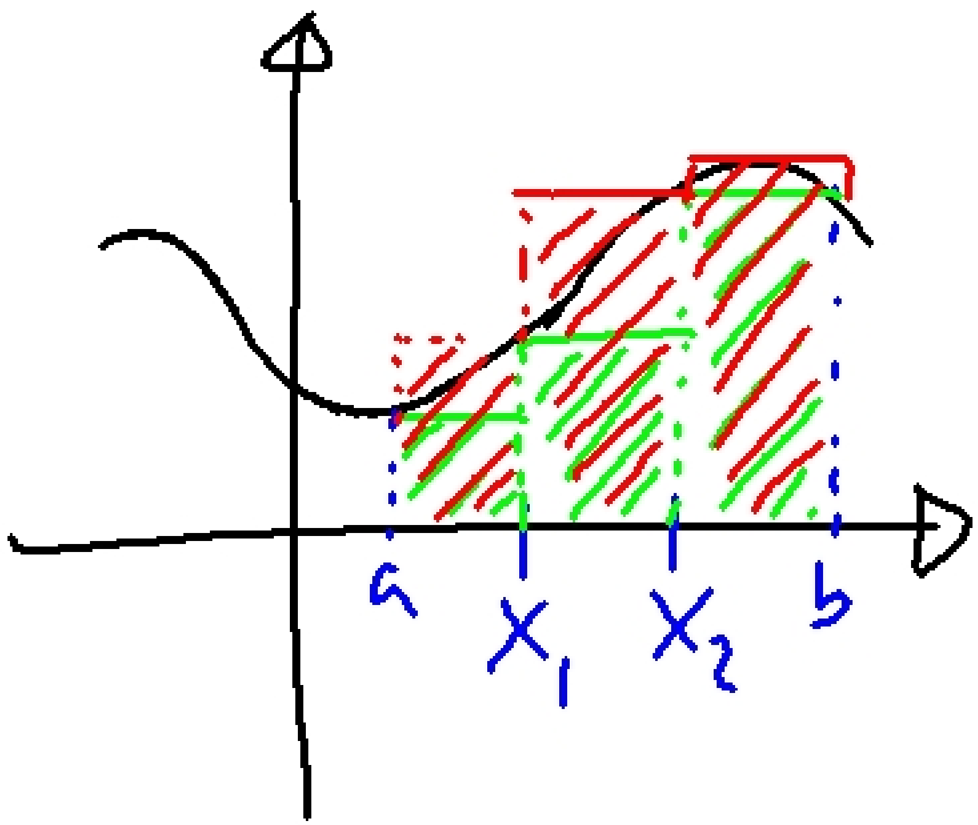
$$\begin{cases} a = \dfrac{-7+6i}{170} \\[2ex] b = \dfrac{-633-356i}{14450} \end{cases}$$

$$\mathrm{Im}(ue^{i4x}) = \mathrm{Im}\big((ax+b)(\cos 4x + i\sin 4x)\big)$$

$$= \mathrm{Re}\,a\,x\sin 4x + \mathrm{Re}\,b\sin 4x + \mathrm{Im}\,a\,x\cos 4x + \mathrm{Im}\,b\cos 4x$$

...

Integralen



undersumma

$$(x_1-a)\cdot\min_{[a,x_1]} f(x)$$
$$+(x_2-x_1)\cdot\min_{[x_1,x_2]} f(x)$$
$$+(b-x_2)\min_{[x_2,b]} f(x)$$

$\leq$ Arean under kurvan

$$\leq (x_1-a)\max_{[a,x_1]} f(x) + (x_2-x_1)\max_{[x_1,x_2]} f(x) +$$
$$+(b-x_2)\max_{[x_2,b]} f(x)$$

översumma

Riemann summa:

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\,\Delta x_k$$

$$\Delta x_k = (x_k - x_{k-1})$$

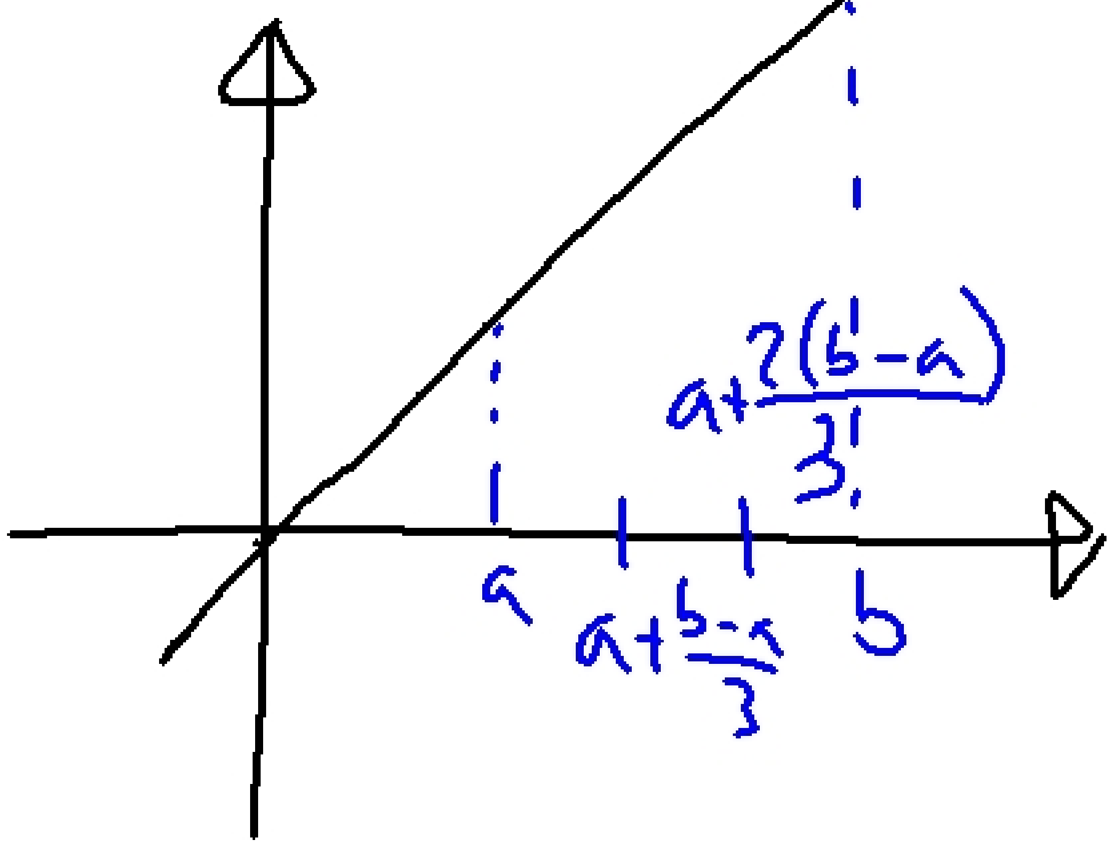
$$a = x_0 < x_1 < \dots < x_{n-1} < x_n = b$$

ξ_k någon punkt i $[x_{k-1}, x_k]$.

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \int_a^b f(x)\,dx$$

Ex: $\displaystyle\int_a^b x\,dx = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \left(a+\frac{k(b-a)}{n}\right)\frac{(b-a)}{n}$

$$= \lim_{n\to\infty} a\frac{(b-a)}{n}n + \frac{(b-a)^2}{n^2}\sum_{k=1}^{n} k$$



$$= \lim_{n\to\infty} a(b-a) + \frac{(b-a)^2}{n^2}\,\frac{n(n+1)}{2}$$

$$= a(b-a)+\frac{(b-a)^2}{2} = \frac{b^2}{2}-\frac{a^2}{2}$$

Sats: Om f är styckvis kontinuerlig och begränsad i intervallet $[a,b]$ så är $f(x)$ integrerbar i intervallet.

Sats (Integralkalkylens huvudsats)

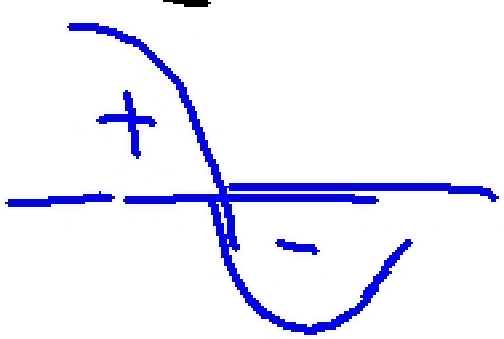
Om F har derivata f och f är integrerbar så gäller

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)$$

Ex: Då $D\left(\frac{x^2}{2}\right) = x$ får vi:

$$\int_a^b x\,dx = \left[\frac{x^2}{2}\right]_a^b = \frac{b^2}{2} - \frac{a^2}{2}$$

Ex: $$\int_1^2 e^x\,dx = \left[e^x\right]_1^2 = e^2 - e$$



Ex: $$\int_0^{\pi} \cos x\,dx = \left[\sin x\right]_0^{\pi} = \sin\pi - \sin 0$$
$$= 0$$

Primitiva funktioner till en funktion f är de funktioner som har derivata f.

Låt säga att F_1 och F_2 är primitiva funktioner till f då har vi att $D(F_2 - F_1) = 0$

$\Rightarrow F_2 - F_1 = C$ en konstant.

Alla primitiva funktioner skiljer s.s så åt med en konstant.

$$\int_a^b f(x)\,dx = F_1(b) - F_1(a)$$

$$= F_2(b) - F_2(a)$$

$F_2(x) = F_1(x) + C$ så

$$F_2(b) - F_2(a) = F_1(b) + C - F_1(a) - C =$$

$$= F_1(b) - F_1(a)$$

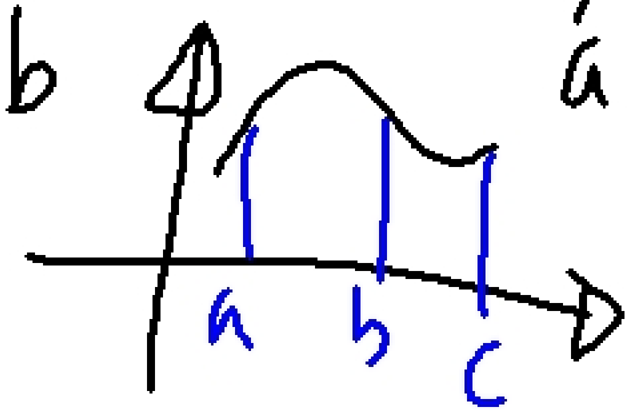
Egenskaper hos integraler

Om f och g är integrerbara gäller

a) $$\int_a^b f(x)+g(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_a^b g(x)\,dx$$

b) $$\int_a^b k f(x)\,dx = k\int_a^b f(x)\,dx$$

c) $$\int_a^b f(x)\,dx + \int_b^c f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx$$



d) Om $f(x) \geq g(x)$ för alla

$x \in [a, b]$ så gäller

$$\int_a^b f(x)\,dx \geq \int_a^b g(x)\,dx$$

e) $$\left| \int_a^b f(x)\,dx \right| \leq \int_a^b |f(x)|\,dx$$