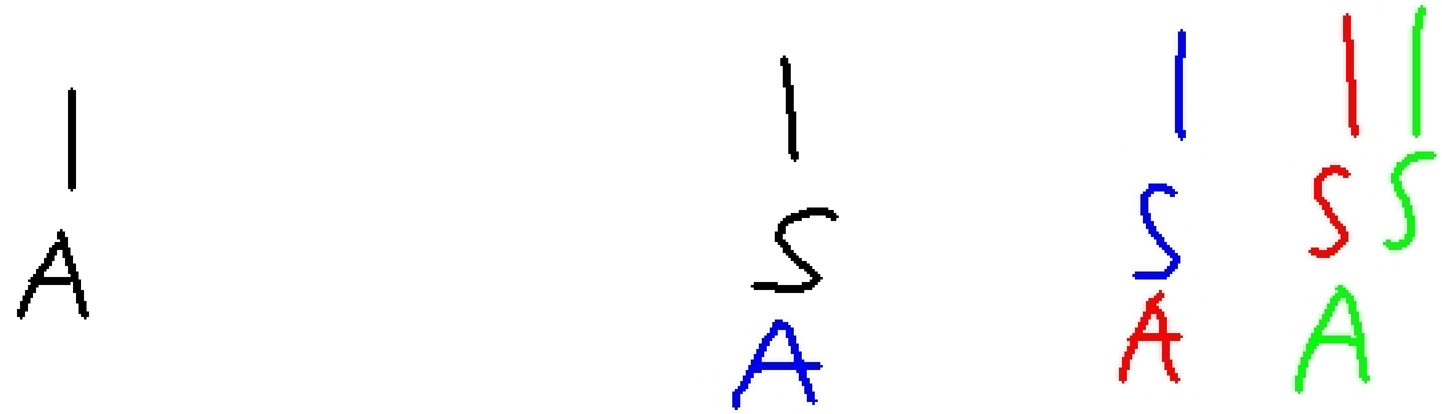
Serier



Akilles: $s + \frac{s}{2} + \frac{s}{4} + \frac{s}{8} + \dots$

Sköldpaddan: $s + \frac{s}{2} + \frac{s}{4} + \frac{s}{8} + \frac{s}{16} + \dots$

A: $s\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2^k}$, S: $s + s\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k}$

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2^k} = \lim_{N\to\infty} \sum_{k=0}^{N} \frac{1}{2^k} = \text{partial summa}$$

$$= \lim_{N\to\infty} \frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^{N+1}}{1-\frac{1}{2}} = \frac{1}{1-\frac{1}{2}} = 2$$

Totala sträckan som Akilles springer $= 2s$, vilket är lika långt som sköldpaddan springer.

Om det tar Akilles tiden T att springa sträckan S blir tiden

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{T}{2^k} = 2T.$$

Ex: $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} 1 = 1+1+\dots$ divergerar

Ex: $1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + \dots$

divergerar

Maclaurinserier

$$f(0) + f'(0)x + f''(0)\frac{x^2}{2!} + \ldots$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} f^{(k)}(0)\frac{x^k}{k!}$$

partialsummorna är Maclaurinpolynomen.

Ex: $e^{-\frac{1}{x^2}}$ har alla derivator $= 0$ i $x = 0$

så Maclaurinserien $= 0$.

Ex: $e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \ldots = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}$

Resttermen

$$\left| e^x - \sum_{k=0}^{N} \frac{x^k}{k!} \right| = \left| e^c \frac{x^{N+1}}{(N+1)!} \right|$$

där $c \in [0,x]$.

Så restermen går mot noll

för $\lim_{N \to \infty} \frac{x^{N+1}}{(N+1)!} = 0$

Ex: $\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \dots$

Resttermen $= \left| \cos c \cdot \frac{x^{2N}}{(2N)!} \right|$

$\leq \left| \frac{x^{2N}}{(2N)!} \right| \to 0$ när $N \to \infty$

Konvergerar för alla x.

Ex: $\frac{1}{1-x}$ Maclaurinserien $= \sum_{k=0}^{\infty} x^k$

$x = 1$ $\sum_{k=0}^{\infty} 1^k$ divergent $x = -1$ $\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k$

divergent

$$\sum_{k=0}^{\infty} x^k = \lim_{N\to\infty} \sum_{k=0}^{N} x^k = \lim_{N\to\infty} \frac{1-x^{N+1}}{1-x}$$

$$\text{resttermen} = -\frac{x^{N+1}}{1-x} \to \begin{cases} 0 & -1 < x < 1 \\ \infty & \\ \text{odef} & \end{cases}$$

tex $x=2$

2^{N+1}

$$D\frac{1}{1-x} = \frac{1}{(1-x)^2}$$

$$D^N \frac{1}{1-x} = \frac{N!}{(1-x)^{N+1}}$$

Serien divergerar om $x \geq 1$ eller $x \leq -1$ och konvergerar för $-1 < x < 1$

Ex: $\int_0^x e^{-t^2}\,dt = \int_0^x 1 - t^2 + \frac{t^4}{2!} - \frac{t^6}{3!} + \dots \, dt$

$$= x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{2!\cdot 5} - \frac{x^7}{7\cdot 3!} + \dots$$

Hur bra approximation får vi om vi approximerar $\int_0^x e^{-t^2}\,dt$ med $x - \frac{x^3}{3}$?

Resternen

$$\left|\frac{x^5}{2!\cdot 5}-\frac{x^7}{3!\cdot 7}+\dots\right| = |x|^5\left|\frac{1}{2!\cdot 5}-\frac{x^2}{3!\cdot 7}+\dots\right|$$

$$\leq |x|^5\left(\left|\frac{1}{2!5}+\frac{x^4}{4!\cdot 9}+\dots\right|+|x|^2\left(\left|\frac{1}{3!\cdot 7}+\frac{x^4}{5!\cdot 11}+\dots\right|\right)\right)$$

$$\leq \frac{|x|^5}{10}\left(1+x^4+\dots\right)+\frac{|x|^7}{42}\left(1+x^4+\dots\right)$$

$$= \frac{|x|^5}{10}\frac{1}{1-x^4}+\frac{|x|^7}{42}\frac{1}{1-x^4} = \frac{|x|^5}{1-x^4}\left(\frac{1}{10}+\frac{x^2}{42}\right)$$

Om $|x| < \frac{1}{2}$ får vi

$$\frac{|x|^5}{1-x^4}\left(\frac{1}{10}+\frac{x^2}{42}\right) \leq \frac{2^{-5}}{1}\left(\frac{1}{10}+\frac{2^{-2}}{42}\right)$$

$$\approx 0{,}0033$$

Så vi får ett fel på maximalt 0,0033.

Konvergenskriterier

Sats: Om $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ och $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ konvergerar så är

$$\sum_{k=1}^{\infty} (a_k + b_k)$$ också konvergent

om c är en konstant så är

$$\sum_{k=1}^{\infty} (c a_k)$$ är konvergent.

Vidare gäller att

$$\sum_{k=1}^{\infty}(a_k+b_k)=\sum_{k=1}^{\infty}a_k+\sum_{k=1}^{\infty}b_k$$

och
$$\sum_{k=1}^{\infty}(ca_k)=c\sum_{k=1}^{\infty}a_k$$

Bevis:
$$\sum_{k=1}^{\infty}(ca_k)=\lim_{N\to\infty}\sum_{k=1}^{N}(ca_k)=\lim_{N\to\infty}c\sum_{k=1}^{N}a_k=$$

$$=c\lim_{N\to\infty}\sum_{k=1}^{N}a_k=c\sum_{k=1}^{\infty}a_k$$

Om $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ konvergent men $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ divergent så blir

$$\sum_{k=1}^{\infty}(a_k+b_k) \text{ divergent.}$$

Ex: $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k}$ konvergent, $\sum_{k=1}^{\infty} 1^k$ div

$$\Rightarrow \sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2^k}+1\right) \text{ divergent.}$$

Sats: Om $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ konvergerar

så är $\lim_{k \to \infty} a_k = 0$

Ex: $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{k}}$ divergerar

för $\sum_{k=1}^{N} \frac{1}{\sqrt{k}} \geq \frac{N}{\sqrt{N}} = \sqrt{N} \to \infty$

men $\frac{1}{\sqrt{k}} \to 0$ när $k \to \infty$

Sats: En positiv serie är konvergent omm dess partialsummor är begränsade.

Sats (Majorantprincipen)

Om $0 \le a_k \le b_k$ för alla $k \ge 1$

och

a) $\sum_{k=1}^{\infty} b_k < \infty \Rightarrow \sum_{k=1}^{\infty} a_k < \infty$

b) $\sum_{k=1}^{\infty} a_k = \infty \Rightarrow \sum_{k=1}^{\infty} b_k = \infty$

Ex: $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k!}$ konvergerar

Förslag jämför med $\frac{1}{2^{k-1}}$

$k! \geq 2^{k-1}$ (Öva: visa med induktion)

$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^{k-1}} = 2$ konvergent

så $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k!}$ konvergerar.

Ex: Vilka av nedanstående serier är konvergenta

$\frac{2}{7}<1$ a) $\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{2}{7}\right)^k$, b) $\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{3}{2}\right)^k$, $\frac{3}{2}>1$

$3\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k!}=$ c) $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{3}{k!}$, d) $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^{\frac{1}{3}}}$?

$\sqrt{k}>\sqrt[3]{k}$

$\frac{1}{\sqrt[3]{k}}>\frac{1}{\sqrt{k}}$

konvergenta: a, c

divergenta: b, d