KTH
Matematik

Lösningsförslag tentamen 2005-05-25, kl 8.00-13.00

5B1140 Analytiska metoder och linjär algebra 1, VOG

1. Ekvationssystemet har precis en lösning om matrisen i vänster led är inverterbar. Eftersom
$$\det\begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \\ 2 & -1 & 1 \end{bmatrix} = 2(1\cdot 1 - 3(-1)) + 1(1(-1) - 1\cdot 2) = 5$$
är nollskild så är matrisen inverterbar.
Alternativt kan man använda Gauss-Jordans metod för att visa att det bara finns en lösning.

2. Genom kvadratkomplettering har vi att andragradsekvationen kan skrivas
$$(z-(1+2i))^2 = 6 + (1+2i)^2 = 3+4i.$$
Ansätt att $(a+bi)^2 = 3+4i$, vilket ger ekvationerna
$$\begin{aligned} a^2-b^2 &= 3 \\ 2ab &= 4 \\ a^2+b^2 &= \sqrt{3^2+4^2} = 5 \quad \text{(beloppet)} \end{aligned}$$
Första och sista ekvationen ger att $2a^2 = 5+3$, dvs $a = \pm 2$, och andra ekvationen ger att $b = \pm 1$. Slutligen
$$z = 1+2i \pm (2+i) = 3+3i, -1+i.$$

3. Derivatan ges av
$$y = \frac{(3e^{3x}\cos(x) - e^{3x}\sin(x))(x^2+1) - (e^{3x}\cos(x))2x}{(x^2+1)^2}$$
och för $x=0$ har vi lutningen 3. Eftersom tangenten skär y-axeln i 1 har tangenten ekvationen
$$y = 3x+1$$

4. Genom standardutvecklingarna för logaritmen och sinus får vi
$$\lim_{x\to 0}\frac{x^2 - \frac{(x^2)^2}{2} + \mathcal{O}((x^2)^3) - x(x - \frac{x^3}{3!} + \mathcal{O}(x^5))}{x^4}.$$
Genom att förkorta får vi
$$\lim_{x\to 0} -\frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \mathcal{O}(x^2) = -\frac{1}{3}.$$
L'Hospitals regel kan användas men måste upprepas fyra gånger!

5. Den generaliserade integralen definieras som

$$\lim_{r\to\infty}\int_0^r e^x e^{-e^x}dx.$$

Eftersom partiell integration inte ger en enklare integral så återstår bara substitutionsmetoden. Den enda tänkbara substitutionen är $z = e^x$, varvid $dz = e^x dx$, och

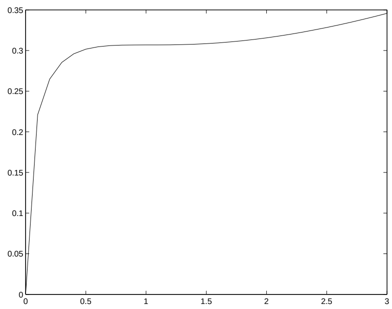
$$\lim_{r\to\infty}\int_1^{e^r} e^{-z}dz = \lim_{r\to\infty}\left[-e^{-z}\right]_1^{e^r} = \lim_{r\to\infty} -e^{-e^r} + e^{-1} = 1/e.$$

6. Avståndet till planet ges av

$$d = \frac{|1\cdot 3 + 2\cdot 3 + 2\cdot(-2) + 4|}{\sqrt{1^2+2^2+2^2}} = 3.$$

Temperaturen ges alltså av $100e^{-3}$, dvs ca 5 grader.

7. Funktionen har utseendet



Detta inses enklast genom att bestämma derivatan

$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} - \frac{1}{1+x} = \frac{1+x-2\sqrt{x}}{2\sqrt{x}(1+x)} = \frac{(1-\sqrt{x})^2}{2\sqrt{x}(1+x)}$$

vilken är noll då $2\sqrt{x} = 1 + x$, dvs då $x = 1$. Andraderivatan är

$$f''(x) = -\frac{1}{4x\sqrt{x}} + \frac{1}{(1+x)^2}$$

och speciellt är den noll i $x = 1$, dvs punktens karaktär måste bestämmas mha högre derivator ($f'''(1) = 1/8$) eller teckenstudie.

	$x = 0$		$x = 1$	
$f(x)$	0	$\nearrow$	$1-\log(2)$	$\nearrow$
$f'(x)$	∞	$+$	0	$+$

Det finns alltså en minpunkt för $x = 0$ och en terasspunkt för $x = 1$.

8. Genom logaritmlagarna kan vi skriva om ekvationen som

$$\log y + \log x = \log{(y + x)} - \log(2)$$

Implicit derivering ger att

$$\frac{y'}{y} + \frac{1}{x} = \frac{y' + 1}{(y + x)}$$

Multiplicering med $xy(x + y)$ ger efter förkortning att $y^2 + y'x^2 = 0$, dvs

$$y' = -\frac{y^2}{x^2}$$

är negativ för alla $x > 1/2$. Den är noll om $y = 0$, men det är omöjligt enligt den första ekvationen, alltså är $y(x)$ strikt avtagande för $x > 1/2$. Alternativt kan man genom logaritmlagarna se att $\log(2xy/(x + y)) = 0$, dvs $2xy/(x + y) = 1$, vilket ger

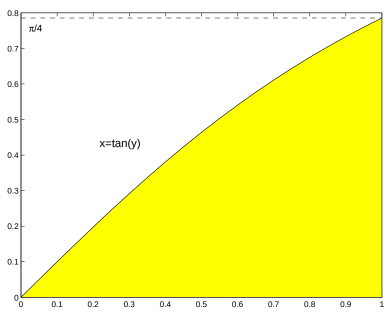
$$y(x) = \frac{x}{2x - 1} = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{2x - 1}\right),$$

och som synes är den strikt avtagande för $x > 1/2$.

9. Arean ges av integralen nedan som beräknas enklast genom partiell integration

$$\begin{aligned}
\int_0^1 \arctan(x)\, dx &= [x \arctan(x)]_0^1 - \int_0^1 \frac{x}{1 + x^2} dx \\
&= 1 \cdot \frac{\pi}{4} - 0 \cdot 0 - \left[\frac{1}{2}\log(1 + x^2)\right]_0^1 \\
&= \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}\log(2)
\end{aligned}$$

Alternativt kan man substituera $z = \arctan(x)$ och sedan $u = \tan(z/2)$. Snyggare är att notera att arean ges av



$\pi/4$ (arean av rektangeln med sidorna 1 och $\pi/4$) minus integralen

$$\int_0^{\pi/4} \tan(y)\, dy = [-\log(\cos(y))]_0^{\pi/4} = -\log\frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{1}{2}\log 2.$$

10. Serien är positiv så vi kan använda t.ex. jämförelsekriteriet. Vi noterar att

$$\log\left(1+\frac{1}{n^2}\right) = \frac{1}{n^2} + \mathcal{O}(\frac{1}{n^4})$$

och jämför därför med serien med termer $b_n = \frac{1}{n^2}$.
Eftersom

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\log(1+1/n^2)}{1/n^2} = \lim_{n\to\infty} n^2 \log(1+\frac{1}{n^2}) = \lim_{n\to\infty} 1 + \mathcal{O}(\frac{1}{n^2}) = 1$$

är skilt från noll och serien med termer b_n konvergerar, så konvergerar även våran serie.
Genom att utnyttja att $x \geq \log(1+x)$ för positiva x kan man även visa konvergens med majorantsatsen.
Kvotkriteriet fungerar dock inte eftersom gränsvärdet $\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = 1$.
Cauchys integralkriterium leder till integralen

$$\int_1^\infty \log\left(1+\frac{1}{x^2}\right)\, dx$$

vilken kan bestämmas mha partiell integration och har värdet $\pi/2 - \log(2)$.