Uppgift 1: Vilka av följande matriser är diagonaliserbara?

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 5 & -1 \\ 5 & 0 & 2 \\ -1 & 2 & 7 \end{pmatrix}, \qquad C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Uppgift 2: Matrisen A har egenvärden 0 och 1. Vektorerna $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ respektive $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ är motsvarande egenvektorer. Bestäm matrisen A.

(Ledning: A kan diagonaliseras.)

Uppgift 3: Låt $B = \{u_1, u_2\}$ och $C = \{v_1, v_2\}$ vara baser i ett tvådimensionellt vektorrum. Mellan baserna gäller ekvationerna

$$v_1 = u_1 + 2u_2,$$
$$v_2 = u_1 + u_2$$

Bestäm koordinaterna i basen C för en vektor v som i basen B har koordinaterna $(3, 1)$.

Svar och lösningar:

Uppgift 1: $\det(A - \lambda I) = (1-\lambda)(2-\lambda)^2$. Egenvektorerna motsvarande egenvärdet 2 är lösningar till ekvationen $(A-2I)X = 0$. Lösningarna är $X = t\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$, t är godtyckligt reellt tal. Lösningsrummet är bara endimensionellt. Matrisen A är inte diagonaliserbar, för att det inte finns någon bas till $\mathbb{R}^3$ av A:s egenvektorer.

Matrisen B är diagonaliserbar eftersom den är symmetrisk.

$\det(C - \lambda I) = (1-\lambda)(2-\lambda)^2$. Ekvationen $(C-2I)X = 0$ har tvådimensionellt lösningsrum: $X = s\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ (dvs. ett plan). Det finns en bas till $\mathbb{R}^3$ av C:s egenvektorer. (En basvektor motsvarar egenvärdet 1 och två andra egenvärdet 2). Alltså C är diagonaliserbar.

Uppgift 2: Egenvektorerna $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ och $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ bildar en bas. Om $P = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, så är $P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Svar: $A = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$.

Uppgift 3: Svar: $(-2, 5)$.