Uppgift 1. Finns det någon funktion $f = f(x, y)$ sådan att $D_1 f(x, y) = x + 4y, \quad D_2 f(x, y) = 3x - y$?

Uppgift 2. Bestäm de partiella derivatorna av första ordningen till funktionen $f(x, y) = g(x^2 y, x \ln y)$ där g är en differentierbar funktion.

Uppgift 3. Ytan $x^2 + y^2 - z^2 = 1$ och planet $x + y + z = 3$ skär varandra längs en kurva. Bestäm en riktningsvektor till skärningskurvans tangent i punkten $(2, -1, 2)$.

Uppgift 4. a) Visa att ekvationen $z^3 - xz - y = 0$ definierar z som en funktion av x och y i en omgivning till punkten $(1, 0, -1)$ $(z = \varphi(x, y))$.

b) Bestäm de partiella derivatorna $D_1\varphi$, $D_2\varphi$ och $D_{21}\varphi$ $(= \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y})$ i punkten $(1, 0)$.

Lösningar och svar

1. Nej! Varför?

2. Låt $G(x,y) = (x^2y, x\ln y)$. Då är $f = g \circ G$. Jacobimatrisen av G är $J_G = \begin{pmatrix} 2xy & x^2 \\ \ln y & \frac{x}{y} \end{pmatrix}$. Enligt kedjeregeln $J_f(x,y) = J_g(G(x,y))J_G(x,y) = \begin{pmatrix} D_1g & D_2g \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2xy & x^2 \\ \ln y & \frac{x}{y} \end{pmatrix}$. Vi får $D_1f(x,y) = 2xy\, D_1g(x^2y, x\ln y)\, x + \ln y\, D_2g(x^2y, x\ln y)$ och $D_2f(x,y) = x^2\, D_1g(x^2y, x\ln y) + \frac{x}{y}\, D_2g(x^2y, x\ln y)$.

3. Punkten $(2,-1,2)$ ligger på skärningskurvan. Gradientvektorn till funktionen $F(x,y,z) = x^2+y^2-z^2-1$ är vinkelrät mot ytan $F(x,y,z) = 0$; $\mathrm{grad}F(x,y,z) = 2(x,y,-z)$. En normal till ytan i punkten $(2,-1,2)$ är $n_1 = \frac{1}{2}\,\mathrm{grad}F(2,-1,2) = (2,-1,-2)$. Vektorn $n_2 = (1,1,1)$ är normal till planet. Båda normaler är vinkelräta mot skärningskurvans tangent. En riktningsvektor till tangenten är

$$n_1 \times n_2 = \det \begin{pmatrix} i & j & k \\ 2 & -1 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = i - 4j + 3k.$$

Svar: Vektorn $(1,-4,3)$ är riktningsvektor till tangenten.

4. På föreläsningen måndagen den 25/10.