Institutionen för Matematik
KTH
Kirsti Mattila

Tentamensskrivning, Analytiska metoder och linjär algebra
5B1141 för högre årskurs

Lördagen den 27 augusti 2005, kl 14.00-19.00.

Preliminära betygsgränser för 3, 4 och 5 är 20, 27 och 35 poäng.
Inga hjälpmedel är tillåtna.

. . . .

1. Sök de kritiska punkterna till funktionen $f(x, y) = x^2y - y^2 - 2xy$ och bestäm deras karaktär. (3p)

2. Parametrisera skärningskurvan mellan cylindern $x^2 + y^2 = 4$ och planet $x + 3y + z = 1$. (3p)

3. Beräkna dubbelintegralen

$$\iint_A \frac{y^2}{x^2}\, dx\, dy$$

där A är området som begränsas av $y = x, y = 2$ och $xy = 1$. (3p)

4. Bestäm det största och det minsta värde som funktionen $f(x, y) = 4xy - 3x^2$ antar i området $x^2 + y^2 \leq 1$. (3p)

5. Beräkna linjeintegralen $\oint_C \sqrt{1+x}\, dx + 2xy\, dy$ där C består av kurvan $y = 1 - x^3$ från $(1, 0)$ till $(0, 1)$ och av två linjesträckor från $(0, 1)$ till origo och från origo till $(1, 0)$. (4p)

6. Beräkna flödet $\iint_S \mathbf{F} \cdot \mathbf{n}\, dS$ av vektorfältet $\mathbf{F}(x, y, z) = (x^2, -2xy, z^3)$ ut ur sfären $S : x^2 + y^2 + z^2 = 1$. Vektorn $\mathbf{n}$ är ytans enhetsnormal. (5p)

7. Bestäm potentialfunktion till vektorfältet $\mathbf{F}(x, y, z) = (2axy^3z, bx^2y^2z + 4z, ax^2y^3 + 4y)$ för de värden av a och b för vilka vektorfältet är konservativt. (4p)

v.g. vänd

8. Matrisen till en linjär avbildning $T : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^2$ är $\begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix}$ m.a. på vissa baser.

a) Bestäm nollrummet av T.

b) Visa att avbildningen T är surjektiv, dvs. att T :s värderum är $= \mathbf{R}^2$. (4p)

9. Bestäm matrisen i standardbasen till den linjära avbildning: $\mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$ som projicerar vektorerna ortogonalt på linjen $(x, y, z) = t(1, 0, 2), \quad t \in \mathbf{R}$. (5p)

10. Bestäm de punkter på ytan $(y + z)^2 + (z - x)^2 = 9$ där normallinjen är parallell med $yz-$planet. (5p)

11. Antag att ekvationerna $e^u \cos v - x = 0$ och $e^u \sin v - y = 0$ definierar i ett område två differentierbara funktioner $u = f(x, y)$ och $v = g(x, y)$. Visa att $D_1 u \, D_1 v + D_2 u \, D_2 v =$konstant i området och bestäm konstanten. (5p)