<u>Lösningar till tentamen den 30 maj 2006,</u>
<u>Analytiska metoder och linjär algebra 5B1141</u>

1. Vi bestämmer först koefficienter α och β så att $(4,5) = \alpha(-1,1) + \beta(2,1)$. Vi får ekv. systemet

$$\begin{cases} 4 = -\alpha + 2\beta \\ 5 = \alpha + \beta \end{cases} \Rightarrow \beta = 3,\ \alpha = 2.$$

Eftersom T är linjär,

$$T(4,5) = 2T(-1,1) + 3T(2,1) = 2(2,1) + 3(6,7) = \underline{(22,23)}$$

2. Låt g vara avbildningen $g(x,y) = \left(\frac{x}{y}, xy\right)$. Då är $h(x,y) = f(g(x,y))$ för alla (x,y), $y \neq 0$, dvs. $h = f \circ g$. Enligt kedjeregeln är Jacobimatrisen J_h av h

$$= J_f\, J_g = (D_1 f \quad D_2 f)\begin{pmatrix} \frac{1}{y} & -\frac{x}{y^2} \\ y & x \end{pmatrix}.$$

$$\Rightarrow x D_1 h + y D_2 h = x\left(\frac{1}{y} D_1 f + y D_2 f\right) + y\left(-\frac{x}{y^2} D_1 f + x D_2 f\right) = \underline{2xy\, D_2 f\left(\frac{x}{y}, xy\right)}.$$

3. Vi söker de kritiska punkterna till $f(x,y) = 24xye^{-x^2-4y^2}$.

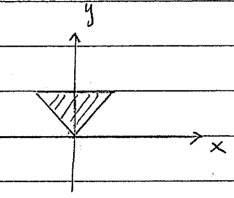
$$\begin{cases} D_1 f(x,y) = e^{-x^2-4y^2}(y - 2xy \cdot 2x) \\ D_2 f(x,y) = e^{-x^2-4y^2}(x - xy \cdot 8y) \end{cases} \qquad \begin{cases} y(1-2x^2) = 0 \\ x(1-8y^2) = 0 \end{cases}$$

Punkterna $(0,0)$, $\pm\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{2\sqrt{2}}\right)$, $\pm\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{2\sqrt{2}}\right)$ är de kritiska punkterna.

$$f\left(\pm\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{2\sqrt{2}}\right)\right) = \frac{6}{e}, \quad f\left(\pm\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{2\sqrt{2}}\right)\right) = -\frac{6}{e}, \quad f(0,0) = 0.$$

Eftersom $0 < 2 < \frac{6}{e}$ och f är kontinuerlig, <u>antar f värdet 2</u>.

4. D är området $|x| \le y$, $0 \le y \le 1$.



$$\iint_D e^{-y^2}\,dx\,dy = \int_0^1\left(\int_{-y}^{y} e^{-y^2}\,dx\right)dy = \int_0^1 2y e^{-y^2}\,dy = \left[-e^{-y^2}\right]_0^1 = \underline{\underline{1 - \frac{1}{e}}}$$

5. K är området: $x^2 + y^2 \le 2$, $-3 \le z \le 3$ och $F(x,y,z) = (xz, x^2y, yz)$.
Enligt divergenssatsen är flödet ut ur K

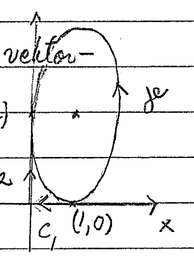
$$\iint_{K\text{:s yta}} F \cdot n\,dS = \iiint_K \operatorname{div} F\,dV.$$

$\operatorname{div} F = z + x^2 + y$. P.g.a. symmetrin är $\iiint_K z\,dV = \iiint_K y\,dV = 0$. Flödet är $= \iiint_K x^2\,dx\,dy\,dz$

$$\underset{\text{(med cylinderkoordinater)}}{=} \int_0^{\sqrt{2}}\int_0^{2\pi}\int_{-3}^{3} r^2\cos^2\varphi \cdot r\,dr\,d\varphi\,dz = \int_0^{\sqrt{2}} r^3\,dr \cdot \int_0^{2\pi}\frac{1+\cos 2\varphi}{2}\,d\varphi \int_{-3}^{3} dz$$

$$= \frac{1}{4}\left[r^4\right]_0^{\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{2} \cdot 2\pi \cdot 6 = \underline{\underline{6\pi}}$$

6. Låt $F(x,y) = \left(\pi\sin(2\pi x) - y^2e^{-x},\ \pi\cos(2\pi y) + 2ye^{-x}\right) = (F_1(x,y), F_2(x,y))$.
Eftersom $D_1 F_2(x,y) = -2ye^{-x} = D_2 F_1(x,y)$, är vektorfältet konservativt.



Vi byter integrationsväg:
C_1: $y = 0$, $x: 1 \to 0$, C_2: $x = 0$, $y: 0 \to 1$

$$\int_\gamma F_1\,dx + F_2\,dy = \int_{C_1} F_1\,dx + \int_{C_2} F_2\,dy$$

$$= \pi\int_1^0 \sin(2\pi x)\,dx + \int_0^1 \left(\pi\cos(2\pi y) + 2y\right)dy = -\frac{1}{2}\left[\cos 2\pi x\right]_1^0 + \frac{1}{2}\left[\sin(2\pi y)\right]_0^1 + \left[y^2\right]_0^2 = \underline{\underline{4}}$$

7. Låt $F(x,y,z) = 2xz + 5xy - z^3 - 35$.

Ekvationen är då $F(x,y,z) = 0$.

$D_3 F(x,y,z) = 2x - 3z^2$. Eftersom $D_3 F(3,2,1) \neq 0$, definierar ekvationen $F(x,y,z) = 0$ en funktion $z = f(x,y)$ sådan att $f(3,2) = 1$.

Vi deriverar ekvationen $F(x,y,z) = 0$ m.a. på x resp. y.

$$\begin{cases} 2z + 2x D_1 f + 5y - 3z^2 D_1 f = 0 \\ 2x D_2 f + 5x - 3z^2 D_2 f = 0 \end{cases}$$

I punkten $(3,2,1)$ blir ekvationssystemet

$$\begin{cases} 2 + 6 D_1 f + 10 - 3 D_1 f = 0 \\ 6 D_2 f + 15 - 3 D_2 f = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} D_1 f(3,2) = -4 \\ D_2 f(3,2) = -5 \end{cases}$$

En normal till tangentplanet är $(-4,-5,-1)$.

Tang. planets ekvation är $(4,5,1)\cdot(x-3, y-2, z-1) = 0$

dvs. $\underline{\underline{4x + 5y + z - 23 = 0}}$.

8. Ytan är $z = \frac{1}{4}(x^2 - y^2) = f(x,y)$, $x^2 + y^2 \le 5$.

Dess area är $\iint dS$ där

$$dS = \sqrt{(D_1 f(x,y))^2 + (D_2 f(x,y))^2 + 1}\, dx\,dy = \sqrt{\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{4} + 1}\, dx\,dy.$$

Ytans projektion i xy-planet är : $x^2 + y^2 \le (\sqrt{5})^2$

Arean är $= \frac{1}{2} \iint\limits_{x^2+y^2 \le 5} \sqrt{x^2+y^2+4}\, dx\,dy = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \left(\int_0^{\sqrt{5}} \sqrt{r^2+4}\, r\, dr \right) d\theta$ (polära koord.)

$$= \pi \cdot \frac{1}{3} \left[(r^2+4)^{\frac{3}{2}} \right]_0^{\sqrt{5}} = \frac{\pi}{3} \left(9^{\frac{3}{2}} - 4^{\frac{3}{2}} \right) = \underline{\underline{\frac{19\pi}{3}}}$$

9. a) Vi bestämmer först egenvärden och egenvektorer av A.

$$\det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} -7-\lambda & 8 & 4 \\ -4 & 5-\lambda & 2 \\ -4 & 4 & 3-\lambda \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -7-\lambda & 1-\lambda & 4 \\ -4 & 1-\lambda & 2 \\ -4 & 0 & 3-\lambda \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} -7-\lambda & 1-\lambda & 4 \\ \lambda+3 & 0 & -2 \\ -4 & 0 & 3-\lambda \end{vmatrix} = -(1-\lambda)\big((3+\lambda)(3-\lambda) - 8\big) = -(1-\lambda)(1-\lambda^2)$$

$$= -(\lambda-1)^2(\lambda+1)$$ Egenvärden är -1 och 1.

Vi löser ekv. systemet $(A - \lambda I)X = 0$ där $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$.

$\underline{\lambda = 1}$ $\quad A - I = \begin{pmatrix} -8 & 8 & 4 \\ -4 & 4 & 2 \\ -4 & 4 & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -2 & 2 & 1 \\ -2 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim$

$$\begin{pmatrix} -2 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{cases} x = s \\ y = t \\ z = 2s - 2t \end{cases} \quad X = s\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix},$$ s, t är reella tal

$\underline{\lambda = -1}$

$$\begin{pmatrix} -6 & 8 & 4 \\ -4 & 6 & 2 \\ -4 & 4 & 4 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -3 & 4 & 2 \\ -2 & 3 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ \\ 2 \;\; 3 \end{matrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{cases} x = 2t \\ y = t \\ z = t \end{cases} \quad X = t\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

t godt. reellt tal

Låt $P = \underline{\underline{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 2 & -2 & 1 \end{pmatrix}}}$. Då är $P^{-1}AP = D = \underline{\underline{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}}}$.

b) Från a) följer att

$$D^{17} = \underbrace{(P^{-1}AP)(P^{-1}AP)\cdots(P^{-1}AP)}_{(17 \text{ termer})} = P^{-1}A^{17}P$$

$D^{17} = D \Rightarrow \underline{\underline{P^{-1}A^{17}P = D}}$. Samma matrisen P och D som i a) diagonaliserar A^{17}.

10. Vi kan skriva

$T(x,y,z) = (x+z, y+2z, x-y-z) = x(1,0,1) + y(0,1,-1) + z(1,2,-1)$.

$\Rightarrow$ Värderummet W spänns upp av vektorerna $(1,0,1)$, $(0,1,-1)$ och $(1,2,-1)$. W är kolonnrummet av matrisen

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$ (som är T:s matris i standardbasen).

Vi kan göra kolonnoperationer i matrisen

$$A \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & -2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} . \Rightarrow W = \text{lin}\{(1,0,1),(0,1,-1)\}.$$

och dessa vektorer är linjärt oberoende.

W är ett plan som går genom origo. En normal till planet är $(1,0,1) \times (0,1,-1) = (-1,1,1)$

Svar: $\underline{\underline{\{(1,0,1),(0,1,-1)\} \text{ är en bas för } W.}}$

$\underline{\underline{\text{Planets ekvation är } x-y-z=0.}}$

11. Vi använder sfäriska koordinater $x = \rho\cos\theta\sin\phi$, $y = \rho\sin\theta\sin\phi$, $z = \rho\cos\phi$.

Kroppen K: $x^2+y^2+z^2 \le 1$, $x \ge 0$, $y \ge 0$, $z \ge 0$ är i sfäriska koordinater K': $0 \le \rho \le 1$, $0 \le \theta \le \frac{\pi}{2}$, $0 \le \phi \le \frac{\pi}{2}$.

$$\iiint_K \frac{x}{x^2+y^2+z^2+1}\,dx\,dy\,dz = \iiint_{K'} \rho\cos\theta\sin\phi(\rho^2+1)^{-1}\rho^2\sin\phi\,d\rho\,d\theta\,d\phi$$

$$= \int_0^1 \frac{\rho^3}{\rho^2+1}\,d\rho \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos\theta\,d\theta \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2\phi\,d\phi$$

$$= \int_0^1 \frac{\rho(\rho^2+1)-\rho}{\rho^2+1}\,d\rho\,\left[\sin\theta\right]_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{\pi/2} \frac{1-\cos 2\phi}{2}\,d\phi$$

$$= \int_0^1 \left(\rho - \frac{\rho}{\rho^2+1}\right)d\rho \cdot 1 \cdot \frac{\pi}{4} = \left[\frac{1}{2}\rho^2 - \frac{1}{2}\ln(\rho^2+1)\right]_0^1 \cdot \frac{\pi}{4}$$

$$= \underline{\underline{\frac{(1-\ln 2)\pi}{8}}}$$