

Institutionen för Matematik
KTH
Kirsti Mattila

**Tentamensskrivning, Analytiska metoder och linjär algebra
5B1141 för högre årskurs**

Tisdagen den 30 maj 2006, kl 14.00-19.00.

Preliminära betygsgränser för 3, 4 och 5 är 20, 27 och 35 poäng.
Inga hjälpmedel är tillåtna.

.....

1. För en linjär avbildning $T : \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}^2$ gäller att $T(-1, 1) = (2, 1)$ och $T(2, 1) = (6, 7)$. Bestäm $T(4, 5)$. (3p)

2. Antag att funktionen $f : \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}$ har kontinuerliga partiella derivator. Låt $h(x, y) = f(\frac{x}{y}, xy)$, där $y \neq 0$. Uttryck $x D_1 h(x, y) + y D_2 h(x, y)$ med hjälp av f :s partiella derivator. (3p)

3. Antar funktionen $f : \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}$ som definieras genom

$$f(x, y) = 24xy e^{-x^2-4y^2}$$

värdet 2 ? (3p)

4. Beräkna dubbelintegralen $\iint_D e^{-y^2} dx dy$ där området D i xy -planet bestäms av $|x| \leq y$, $0 \leq y \leq 1$. (3p)

5. Låt K vara den solida cylinderbit som beskrivs av olikheterna $x^2 + y^2 \leq 2$, $-3 \leq z \leq 3$. Beräkna flödet av vektorfältet $\mathbf{F}(x, y, z) = (xz, x^2y, yz)$ ut genom den totala begränsningsytan till K . (4p)

6. Beräkna linjeintegralen $\int_{\gamma} (\pi \sin(2\pi x) - y^2 e^{-x}) dx + (\pi \cos(2\pi y) + 2y e^{-x}) dy$ där γ är delen av ellipsen $4(x-1)^2 + (y-2)^2 = 4$ från punkten $(1, 0)$ till punkten $(0, 2)$ tagen i positiv riktning. (4p)

7. Visa att ekvationen $2xz + 5xy - z^3 = 35$ definierar i en omgivning av punkten $(3, 2, 1)$ en funktion $z = f(x, y)$ sådan att $f(3, 2) = 1$. Bestäm en ekvation för tangentplanet till ytan $z = f(x, y)$ i punkten $(3, 2, 1)$. (4p)

v.g. vänd

8. Bestäm arean av den del av ytan $x^2 - y^2 - 4z = 0$ som ligger innanför cylindern $x^2 + y^2 = 5$. (4p)

9. Låt A vara matrisen $\begin{pmatrix} -7 & 8 & 4 \\ -4 & 5 & 2 \\ -4 & 4 & 3 \end{pmatrix}$.

a) Bestäm matriser P och D så att $P^{-1}AP = D$, där D är en diagonalmatris.

b) Samma uppgift som i a) för matrisen A^{17} . (6p)

10. En linjär avbildningen $T : \mathbf{R}^3 \rightarrow \mathbf{R}^3$ definieras genom

$$T(x, y, z) = (x + z, y + 2z, x - y - z).$$

T :s värderum W är ett plan. Ange en bas för W och planets ekvation. (5p)

11. Beräkna trippelintegralen

$$\iiint_K \frac{x}{x^2 + y^2 + z^2 + 1} dx dy dz$$

där kroppen K bestäms av olikheterna $x^2 + y^2 + z^2 \leq 1$, $x \geq 0$, $y \geq 0$, $z \geq 0$. (5p)
