Institutionen för Matematik
KTH
Kirsti Mattila

Tentamensskrivning, Analytiska metoder och linjär algebra
5B1141 för högre årskurs

Måndagen den 19 december 2005, kl 8.00-13.00.

Preliminära betygsgränser för 3, 4 och 5 är 20, 27 och 35 poäng.
Inga hjälpmedel är tillåtna.

. . . .

1. Bestäm tangentplanet till ytan $x^2 + y^2 - 2z^2 = 3$ i punkten $(2, 1, 1)$. (3p)

2. Sök de kritiska punkterna till funktionen $f(x, y) = 2x^2 + y^2 - 4xy^2$ och bestäm deras karaktär. (3p)

3. Bestäm dimensionen av det underrum av $\mathbf{R}^4$ som spänns upp av vektorerna $(1, 1, 10, -4), (\frac{1}{2}, 0, 1, -\frac{1}{2})$ och $(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 3, -1)$. (3p)

4. En linjär avbildning $T : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$ definieras genom $T(x, y) = (3x - y, x + 2y)$. Bestäm T :s matris i basen $\{(1, 1), (-2, 1)\}$. (3p)

5. Beräkna dubbelintegralen $\iint_A |y|e^x \, dx \, dy$ där A är området $\{(x, y) : y^2 \leq x \leq 2 - y^2\}$. (4p)

6. Funktionen $h : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$ är differentierbar och uppfyller ekvationen $D_1h(x, y) + D_2h(x, y) = 0$. Visa att funktionen $f(x, y) = h(x + y^2, x^2 + y)$ uppfyller ekvationen $(1 - 2y)D_1f(x, y) + (1 - 2x)D_2f(x, y) = 0$. (4p)

7. Beräkna arean av den del av ytan $x^2 + 2y - 2z = 0$ som ligger ovanför triangeln som begränsas av linjerna $x = 1, y = 0$ och $y = 3x$ i xy-planet. (4p)

8. Bestäm volymen av den kropp som är innanför parboloiden $z = x^2 + y^2$ och innanför halvsfären $z = \sqrt{2 - x^2 - y^2}$. (4p)

v.g. vänd

9. Antag att a är en konstant, $a \neq 0$ och $A = \begin{pmatrix} 1 & a \\ a & 1 \end{pmatrix}$. Bestäm en ortogonal matris P så att $P^T AP$ är en diagonalmatris. (5p)

10. a) Ange områden där integralen

$$I = \int_C \frac{1}{y}\, dx + (\frac{1}{z} - \frac{x}{y^2})dy - \frac{y}{z^2}\, dz$$

är oberoende av vägen.

b) Beräkna integralen I när C är kurvan som har parameterframställning $x = \sin 2t$, $y = \cos^2 t$, $z = \cos^2 t$, $t : 0 \to \frac{\pi}{4}$. (6p)

11. Låt $f(x, y) = \frac{x}{4+x^2+y^2}$.

a) Bestäm det största och det minsta värde som f antar i halvcirkelskivan $\{(x, y) : x \geq 0, \quad x^2 + y^2 \leq R^2\}$ där R är en konstant > 2.

b) Bestäm det största och det minsta värde i förekommande fall som f antar i halvplanet $\{(x, y) : x \geq 0\}$. (5p)