Institutionen för Matematik
KTH
Kirsti Mattila

Tentamensskrivning, Analytiska metoder och linjär algebra 5B1141

Onsdagen den 16 mars 2005, kl 8.00-13.00.

Preliminära betygsgränser för 3, 4 och 5 är 20, 27 och 35 poäng.
Inga hjälpmedel är tillåtna.

. . . .

1. Funktionen $f : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$ har kontinuerliga partiella derivator. Planet $4x + 3y - 3z = 1$ är tangentplan till ytan $z = f(x, y)$ i punkten $(1, 1, f(1, 1))$. Bestäm $f(1, 1), D_1 f(1, 1)$ och $D_2 f(1, 1)$. (3p)

2. Bestäm riktningsderivatan av funktionen $f(x, y, z) = \ln(xy + z)$ i punkten $(1, 3, 0)$ i riktningen mot origo. (3p)

3. Antag att $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ och $g : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ och är deriverbara funktioner. Låt $F(x, y) = f(x^2 - y^2)$ och $G(x, y) = g(xy)$ för alla $(x, y) \in \mathbf{R}^2$. Visa att $\text{grad}F(x, y) \cdot \text{grad}G(x, y) = 0$. (3p)

4. Beräkna linjeintegralen $\oint_C (x^2 - y^2)\, dx + 2xy\, dy$ där C är kurvan som begränsar området $\{(x, y) : x^2 + y^2 \leq 1,\ x + y \geq 1\}$ genomlöpt ett varv i positiv riktning. (4p)

5. Visa att ekvationen $x^3 + y^3 - 5xy + 3 = 0$ definierar i en omgivning till punkten $(1, 1)$ en deriverbar funktion $y = f(x)$ och bestäm $f'(1)$. (4p)

6. Visa att integralen $\int_C \mathbf{F} \cdot dr$, där $\mathbf{F}(x, y, z) = (xe^{x^2}, 3(y+3)^2(z-1), (y+3)^3)$ är oberoende av vägen och beräkna integralen när C är en glatt kurva från punkten $(1, 0, 0)$ till punkten $(0, 0, 1)$. (4p)

7. Låt $f(x, y) = e^{xy+1} - xy$.
a) Bestäm alla kritiska punkter till f och undersök om origo är en lokal maximumpunkt, minimumpunkt eller ingen extrempunkt.
b) Visa att f har absolut minimum i $\mathbf{R}^2$.
(Ledning: Undersök funktionen $g(t) = e^{t+1} - t$.) (5p)

v.g. vänd

8. Bestäm de högsta och lägsta punkterna på ytan $x^2+2y^2+z^2-4x+4y-2z+6=0$. Vi antar att koordinatsystemets positiva $z-$axel pekar uppåt. (4p)

9. Bestäm matrisen eller matriserna A med följande egenskaper: A är en symmetrisk 2×2-matris, A har egenvärden 0 och 5 och en egenvektor, som motsvarar egenvärdet 5, är $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$. (4p)

10. En linjär avbildningen $T : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^2$ definieras genom $T(x,y,z) = (x+y, y+z)$. Bestäm

a) en bas för nollrummet av T.

b) en bas för värderummet av T. (5p)

11. Beräkna $\iint_S \mathbf{F} \cdot \mathbf{N} \, dS$ där $\mathbf{F}(x,y,z) = (xy, yz, xy)$ och S är ytan av "glasstruten" som bestäms av $x^2+y^2+z^2=1$, $z \geq 0$ och $z+1=\sqrt{x^2+y^2}$, $z \leq 0$. Enhetsnormalen $\mathbf{N}$ är riktad utåt. (5p)