Uppgift 1. Finns det någon funktion $f = f(x, y)$ sådan att $D_1 f(x, y) = x + 4y, \quad D_2 f(x, y) = 3x - y$?

Uppgift 2. Uttryck de partiella derivatorna $D_1 f, D_2 f$ och $D_{21} f$ av funktionen $f(x, y) = g(2x + 3y, xy)$ med hjälp av g:s partiella derivator. Man antar att g har kontinuerliga partiella derivator av godtycklig ordning.

Uppgift 3. Ytan $x^2 + y^2 - z^2 = 1$ och planet $x + y + z = 3$ skär varandra längs en kurva. Bestäm en riktningsvektor till skärningskurvans tangent i punkten $(2, -1, 2)$.

Lösningar och svar

1. Nej! Varför?

2. Låt $G(x,y) = (2x+3y, xy)$. Då är $f = g \circ G$. Jacobimatrisen av G är $J_G = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ y & x \end{pmatrix}$. Enligt kedjeregeln $J_f(x,y) = J_g(G(x,y))J_G(x,y) = (D_1 g \quad D_2 g)\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ y & x \end{pmatrix}$. Vi får

$$\begin{aligned} D_1 f(x,y) &= 2\, D_1 g\, x + y\, D_2 g \qquad (1) \\ \text{och}\ \ D_2 f(x,y) &= 3\, D_1 g + x\, D_2 g \end{aligned}$$

där de partiella derivatorna av g räknas i punkten $(2x+3y, xy)$. Vidare är $D_{21} f(x,y) = D_1(D_2 f(x,y)) = 3D_1(D_2 g) + D_2 g + xD_1(D_2 g)$. Som i formeln (1) får vi $D_1(D_1 g(2x+3y, xy)) = 2D_{11}g + yD_{12}g$ och $D_1(D_2 g(2x+3y, xy)) = 2D_{21}g + yD_{22}g$.

Eftersom $D_{12}g = D_{21}g$ är

$$D_{21} f(x,y) = D_2 g + 6D_{11}g + (2x+3y)D_{12}g + xyD_{22}g$$

där g:s partiella derivator räknas i punkten $(2x+3y, xy)$.

3. Punkten $(2,-1,2)$ ligger på skärningskurvan. Gradientvektorn till funktionen $F(x,y,z) = x^2 + y^2 - z^2 - 1$ är vinkelrät mot ytan $F(x,y,z) = 0$; $\mathrm{grad}F(x,y,z) = 2(x,y,-z)$. En normal till ytan i punkten $(2,-1,2)$ är $n_1 = \frac{1}{2}\mathrm{grad}F(2,-1,2) = (2,-1,-2)$. Vektorn $n_2 = (1,1,1)$ är normal till planet. Båda normaler är vinkelräta mot skärningskurvans tangent. En riktningsvektor till tangenten är

$$n_1 \times n_2 = \det\begin{pmatrix} i & j & k \\ 2 & -1 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = i - 4j + 3k.$$

Svar: Vektorn $(1,-4,3)$ är en riktningsvektor till tangenten.