Lösningar till tentamen den 18/12 2006

Analytiska metoder och linjär algebra 5B1141 för högre årskurs

1. De partiella derivatorna av $f(x,y) = 2x^2 - xy + y^2 + y^4$ är $D_1 f(x,y) = 4x - y$ och $D_2 f(x,y) = -x + 2y + 4y^3$.

Kritiska punkter: $\begin{cases} 4x - y = 0 \\ -x + 2y + 4y^3 = 0 \end{cases} \iff \begin{array}{l} x = \frac{1}{4}y \\ y(\underbrace{-\frac{1}{4} + 2 + 4y^2}_{\neq 0}) = 0 \end{array}$

$(0,0)$ är den enda kritiska punkten.

$AC - B^2 = 4(2 + 12y^2) - (-1)^2$. I origo $AC - B^2 = 7 > 0$

och $A = 4 > 0 \Rightarrow$ Origo är en lokal minimipunkt, $f(0,0) = 0$.

2. P.g.a. symmetrin är $\iint_B |y| e^x \, dx\,dy = 2\iint_{B_1} y e^x \, dx\,dy$

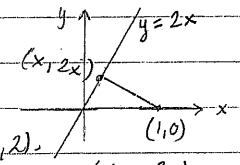
där B_1 är området $\begin{cases} y \geq 0 \\ -1 \leq x \leq 1 - y^2 \end{cases}$ $\quad -1 = 1 - y^2 \iff y = \pm\sqrt{2}$

Vi får $2\int_0^{\sqrt{2}} \left(\int_{-1}^{1-y^2} y e^x \, dx \right) dy = \int_0^{\sqrt{2}} 2y \left[e^x \right]_{-1}^{1-y^2} dy$

$= \int_0^{\sqrt{2}} 2y(e^{1-y^2} - e^{-1}) \, dy = \left[-e^{1-y^2} - \frac{y^2}{e} \right]_0^{\sqrt{2}}$

$= -\frac{1}{e} - \frac{2}{e} + e = e - \frac{3}{e}$

3. Låt $T(1,0) = (x, 2x)$. Vektorn $(x, 2x) - (1,0)$ är vinkelrät mot linjen, dvs. vinkelrät mot linjens riktningsvektor $(1,2)$.



$\Rightarrow (x-1, 2x) \cdot (1,2) = 0 \Rightarrow x = \frac{1}{5}$, $T(1,0) = \left(\frac{1}{5}, \frac{2}{5}\right)$

På samma sätt bestäms $T(0,1) = \left(\frac{2}{5}, \frac{4}{5}\right)$.

T:s matris är $\begin{pmatrix} \frac{1}{5} & \frac{2}{5} \\ \frac{2}{5} & \frac{4}{5} \end{pmatrix}$

4. $(a+b, 2b, a+b-c, -b+c) = a(1,0,1,0) + b(1,2,1,-1) + c(0,0,-1,1)$. Låt $u = (1,0,1,0)$, $v = (1,2,1,-1)$, $w = (0,0,-1,1)$. Underrummet är det linjära höljet $\text{lin}\{u, v, w\}$. Vektorerna u, v och w är linjärt oberoende: Om $\lambda_1 u + \lambda_2 v + \lambda_3 w = \bar{0}$, dvs.

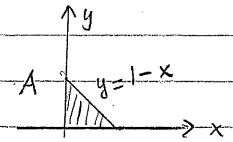
$\lambda_1(1,0,1,0) + \lambda_2(1,2,1,-1) + \lambda_3(0,0,-1,1) = 0$ så är

$\lambda_1 + \lambda_2 = 0$, $2\lambda_2 = 0$, $\lambda_1 + \lambda_2 - \lambda_3 = 0$, $-\lambda_2 + \lambda_3 = 0$

$\Rightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$

$\{u, v, w\}$ är en bas för underrummet.

5. $f(x,y) = xy^2 + 2x^2y - xy$



1) $\begin{cases} D_1 f(x,y) = y^2 + 4xy - y = y(y + 4x - 1) = 0 \\ D_2 f(x,y) = 2xy + 2x^2 - x = x(2y + 2x - 1) = 0 \end{cases}$

Vi söker kritiska inre punkter i A ($y = 0$ eller $x = 0$ ger randpunkter). $\begin{cases} y + 4x - 1 = 0 \\ 2y + 2x - 1 = 0 \end{cases} \Rightarrow y = 1 - 4x = \frac{1-2x}{2}$

$\Rightarrow \left(\frac{1}{6}, \frac{1}{3}\right)$, $\quad f\left(\frac{1}{6}, \frac{1}{3}\right) = -\frac{1}{54}$

2) Randen a) $y = 0 \Rightarrow f(x,0) = 0 \quad 0 \leq x \leq 1$

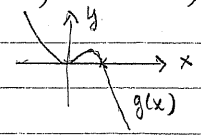
b) $x = 0 \Rightarrow f(0,y) = 0 \quad 0 \leq y \leq 1$

c) $y = 1 - x \quad f(x,y) = xy(y + 2x - 1)$

Låt $g(x) = f(x, 1-x) = x(1-x)(1 - x + 2x - 1) = x^2(1-x)$

$g'(x) = 2x - 3x^2 = x(2 - 3x) = 0$

om $x = 0$, $x = \frac{2}{3}$.



På intervallet $0 \leq x \leq 1$ (se bilden)

$g\left(\frac{2}{3}\right) = \frac{4}{27}$ är största värdet av g och $g(0) = g(1) = 0$ minsta värdet.

Eftersom f är kontinuerlig, A är sluten och begränsad, antar f i A ett största och ett minsta värde.

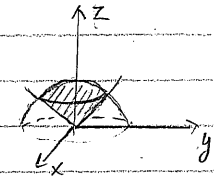
1) och 2) $\Rightarrow$ Största värdet är $f\left(\frac{2}{3}, \frac{1}{3}\right) = \frac{4}{27}$ och minsta värdet $f\left(\frac{1}{6}, \frac{1}{3}\right) = -\frac{1}{54}$

6. De partiella derivatorna av $g(x,y,z) = f(x/y, x/z)$ är enligt kedjeregeln $D_1 g = \frac{1}{y} D_1 f + \frac{1}{z} D_2 f$, $D_2 g = -\frac{x}{y^2} D_1 f$ och $D_3 g = -\frac{x}{z^2} D_2 f$.

$\Rightarrow x D_1 g + y D_2 g + z D_3 g = 0$

7. Ytornas skärningskurva:

$$\begin{cases} z = \sqrt{1-x^2-y^2} \\ z = \sqrt{x^2+y^2} \end{cases} \qquad 1-x^2-y^2 = x^2+y^2 \Rightarrow x^2+y^2 = \frac{1}{2}$$



Projektionen i xy-planet: $x^2+y^2 \le \frac{1}{2}$

Volymen $= \iint_{x^2+y^2 \le \frac{1}{2}} \left(\sqrt{1-x^2-y^2} - \sqrt{x^2+y^2}\right) dx\,dy =$ polära koord.

$$\int_0^{2\pi} \left(\int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} \left(\sqrt{1-r^2} - r\right) r\,dr \right) d\theta = 2\pi \left[-\frac{1}{3}(1-r^2)^{3/2} - \frac{1}{3} r^3 \right]_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}}$$

$$= 2\pi\left(-\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{3}\frac{1}{2\sqrt{2}} + \frac{1}{3}\right) = \underline{\underline{\frac{2\pi}{3}\left(1-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)}}$$

8. En normal till ytan $x^2+y^2+z^2=1$ i en punkt (x_0,y_0,z_0) är $n = (2x_0, 2y_0, 2z_0) = 2(x_0,y_0,z_0)$.
$(2,1,-3)$ är en normal till planet.
Ytans tangentplan är parallellt med planet $\Leftrightarrow$ normalerna är parallella $\Leftrightarrow (x_0,y_0,z_0) = t(2,1,-3)$ för något tal t.

$\Rightarrow x_0 = 2t,\ y_0 = t,\ z_0 = -3t$

Punkten (x_0,y_0,z_0) är på sfären $\Rightarrow$

$4t^2 + t^2 + 9t^2 = 1 \qquad 14t^2 = 1 \Rightarrow t = \pm\frac{1}{\sqrt{14}}$

Punkterna är $\underline{\underline{\pm\left(\frac{2}{\sqrt{14}}, \frac{1}{\sqrt{14}}, -\frac{3}{\sqrt{14}}\right)}}$

9. Vi söker en potential till vektorfältet $F(x,y,z) = \left(\frac{z}{y}, -\frac{xz}{y^2}, \frac{x}{y}\right)$. Om det finns u så att $F = \operatorname{grad} u$, så är $D_1 u = \frac{z}{y}$, $D_2 u = -\frac{xz}{y^2}$ och $D_3 u = \frac{x}{y}$.

$D_1 u = \frac{z}{y} \Rightarrow u(x,y,z) = \frac{xz}{y} + g(y,z)$

$D_2 u = -\frac{xz}{y^2} + D_1 g(y,z) = -\frac{xz}{y^2}$ etc.

Funktionen $u(x,y,z) = \frac{xz}{y}$ uppfyller de tre villkoren.

$\Rightarrow$ I ett område där $y \ne 0$, till ex. i området $A = \{(x,y,z) : y > 0\}$ är vektorfältet konservativt.

Kurvan C kan parametriseras $x = \cos t$, $y = 2 - \sin t$, $z = \sin t$. $\Rightarrow y \ge 1$. Kurvan C ligger i A.

$\Rightarrow \oint_C F \cdot dr = \underline{\underline{0}}$

10. Vi räknar egenvärden av $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & \alpha \end{pmatrix}$.

$$\det(A - \lambda I) = \det\begin{pmatrix} 1-\lambda & 1 & 1 \\ 1 & 1-\lambda & 1 \\ 0 & 0 & \alpha-\lambda \end{pmatrix} = (1-\lambda)^2(\alpha-\lambda) - (\alpha-\lambda)$$

$$= (\alpha-\lambda)(1+\lambda^2-2\lambda-1) = \lambda(\lambda-2)(\alpha-\lambda)$$

Egenvärden är $\lambda = 0$, $\lambda = 2$ och $\lambda = \alpha$.

a) Om $\alpha \ne 0$, $\alpha \ne 2$ har matrisen tre olika egenvärden $\Rightarrow$ den är diagonaliserbar.

b) Om $\alpha = 0$, $\lambda = 0$ är en dubbelrot till ekv. $\det(A - \lambda I) = 0$. Egenvektorerna är lösningar till ekvationen $AX = \bar{0}$. $A \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -s-t \\ s \\ s \end{pmatrix} =$

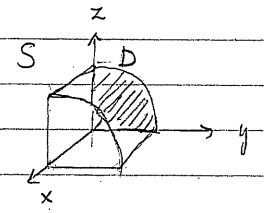
$s\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} - t\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ Egenrummet är 2-dim. $\Rightarrow A$ är diagonaliserbar.

c) Om $\alpha = 2$, ekv. $(A - 2I)X = 0$ har koeff. matris

$\begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow X = \begin{pmatrix} t \\ t \\ 0 \end{pmatrix} = t\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ 1-dimensionellt A är inte diag.

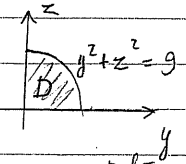
Svar: $\underline{A \text{ är diagonaliserbar} \Leftrightarrow \alpha \ne 2}$

11. Ytan S är sluten. Enligt Gauss sats är $\iint_S F\cdot n\,dS = \iiint_K \operatorname{div} F\,dV$



där K är kroppen inuti S. Låt D vara projektionen av K i yz-planet.

$$\Rightarrow \iint_S F\cdot n\,dS = \iint_D \left(\int_0^2 (2xy - 2y + 8z)\,dx\right)dy\,dz$$



$$= \iint_D \left[x^2y - 2xy + 8xz\right]_0^2 dy\,dz = \iint_D (4y - 4y + 16z)\,dy\,dz =$$

polära koord. $\begin{cases} y = r\cos\theta \\ z = r\sin\theta \end{cases}$

$$= \int_0^{\pi/2}\left(\int_0^3 16\,r\sin\theta\, r\,dr\right)d\theta = \left[-\cos\theta\right]_0^{\pi/2}\left[\frac{16}{3}r^3\right]_0^3 = \underline{\underline{144}}$$