Lösningar till tentamen den 16/3 2005
Analytiska metoder och linjär algebra, 5B1141

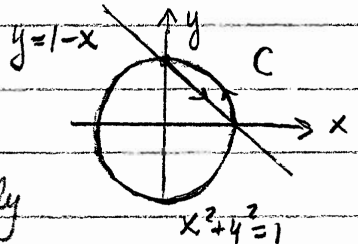
1. Punkten $(1,1,f(1,1))$ är i planet $\Rightarrow 4+3-3f(1,1)=1$
$\Rightarrow \underline{f(1,1)=2}$. Tangentplanets normaler $(D_1f(1,1), D_2f(1,1), -1)$
och $(4,3,-3)$ är parallella.
$D_1f(1,1)=4t$, $D_2f(1,1)=3t$, $-1=-3t \Rightarrow t=\frac{1}{3}$,
$\underline{D_1f(1,1)=\frac{4}{3}}$, $\underline{D_2f(1,1)=1}$.

2. Gradienten av f i punkten (x,y,z) är $\left(\frac{y}{xy+z}, \frac{x}{xy+z}, \frac{1}{xy+z}\right)$;
$\text{grad } f(1,3,0) = \left(1, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right)$
Riktningen $v = -\frac{(1,3,0)}{\sqrt{10}}$. Riktningsderivatan i riktningen v är

$$D_v f(1,3,0) = \text{grad } f(1,3,0)\cdot v = -\frac{1}{\sqrt{10}}\left(1,\frac{1}{3},\frac{1}{3}\right)\cdot(1,3,0) = \underline{\underline{-\frac{2}{\sqrt{10}}}}$$

3. Enligt kedjeregeln är $D_1F(x,y) = 2x f'(x^2-y^2)$ och
$D_2F(x,y) = -2y f'(x^2-y^2)$, $D_1G(x,y) = y\, g'(xy)$ och $D_2G(x,y)$
$= x g'(x,y)$.
Skalärprodukten $\text{grad } F(x,y)\cdot \text{grad } G(x,y) = \left(2xf'(x^2-y^2), -2yf'(x^2-y^2)\right)\cdot$
$\underline{(y g'(xy), x g'(xy)) = 2xf'(x^2-y^2)y g'(x,y) - 2y f'(x^2-y^2)x g'(xy) = 0.}$

4. Vi kan använda Green's formel



Om $F(x,y) = (x^2-y^2, 2xy) = (F_1(x,y), F_2(x,y))$

$$\oint_C F\cdot dr = \iint_A (D_1F_2 - D_2F_1)\,dx\,dy = 4\iint_A y\,dx\,dy$$

där A är området innanför C

$$\int_C F\cdot dr = 4\int_0^1\left(\int_{1-x}^{\sqrt{1-x^2}} y\,dy\right)dx = 4\int_0^1 \tfrac{1}{2}\left(1-x^2-(1-x)^2\right)dx$$

$$= 4\int_0^1 (x-x^2)\,dx = 4\left[\tfrac{1}{2}x^2 - \tfrac{1}{3}x^3\right]_0^1 = \underline{\frac{2}{3}}$$

5. Låt $F(x,y) = x^3 + y^3 - 5xy + 3$.
$D_2F(x,y) = 3y^2 - 5x$. Eftersom $F(1,1) = 0$ och $D_2F(1,1) = -2 \neq 0$, definiera ekvationen $F(x,y)=0$ enligt implicitfunktionssatsen i en omgivning av $(1,1)$ en deriverbar funktion $y = f(x)$. Derivering av ekv. $F(x,y)=0$ m.a. på x ger $3x^2 + 3y^2y' - 5y - 5xy' = 0$
När $x=1$, $y=1$, $3 + 3y' - 5 - 5y' = 0 \Rightarrow y' = \underline{\underline{f'(1) = -1}}$

6. Vi visar att F har potential, dvs. $F = \text{grad}\, u$.
Antag att $D_1u(x,y,z) = xe^{x^2}$. Då är $u = \frac{1}{2}e^{x^2} + g(y,z)$.
Derivering m.a. på y ger $D_2u = D_1 g = 3(y+3)^2(z-1)$.
Genom att integrera får vi $g(y,z) = (y+3)^3(z-1) + h(z)$.
Vi deriverar $u = \frac{1}{2}e^{x^2} + (y+3)^3(z-1) + h(z)$ m.a. på z.
$\Rightarrow (y+3)^3 + h'(z) = (y+3)^3 \Rightarrow h(z)$ är konstant som vi kan välja $= 0$. Funktionen $u(x,y,z) = \frac{1}{2}e^{x^2} + (y+3)^3(z-1)$ uppfyller ekvationen $F = \text{grad}\, u$. Integralen är således oberoende av vägen.

$$\int_C F \cdot dr = u(0,0,1) - u(1,0,0) = \frac{1}{2} - \left(\frac{1}{2}e - 27\right) = \underline{\underline{\frac{55-e}{2}}}$$

7. a) De partiella derivatorna av $f(x,y) = e^{xy+1} - xy$ är
$D_1f(x,y) = ye^{xy+1} - y = y(e^{xy+1} - 1)$
$D_2f(x,y) = xe^{xy+1} - x = x(e^{xy+1} - 1)$
Ekv. systemet $D_1f(x,y) = 0$, $D_2f(x,y) = 0$ har lösningarna $x = y = 0$ och $xy + 1 = 0$ dvs. $y = -\frac{1}{x}$.
De kritiska punkterna är $\underline{(0,0)}$ och $\underline{(x, -\frac{1}{x})}$ där $x \neq 0$.
$D_{11}f(x,y) = y^2e^{xy+1}$, $D_{12}f(x,y) = e^{xy+1} + xye^{xy+1} - 1$
$D_{22}f(x,y) = x^2e^{xy+1}$
I origo får vi $AC - B^2 = 0 - (e-1)^2 < 0$
Origo är en sadelpunkt, dvs. inte någon extrempunkt.

7 b) För $g(t) = e^{t+1} - t$ är $g'(t) = e^{t+1} - 1 = 0$ om $t = -1$,
$g'(t) < 0$ om $t < -1$ och $g'(t) > 0$ om $t > -1$; $g(-1) = 2$.
För alla t är $g(t) \geq g(-1) = 2$.
$\Rightarrow f(x,y) = e^{xy+1} - xy = g(xy) \geq 2$ för alla (x,y)
och $f(x, -\frac{1}{x}) = 2$ om $x \neq 0$.

<u>Minsta värdet av f i $\mathbb{R}^2$ är 2.</u>

---

8. Ytan är en ellips. Dess ekvation kan skrivas
$(x-2)^2 + 2(y+1)^2 + (z-1)^2 = 1$. Ellipsens halvaxlar är
$1, \frac{1}{\sqrt{2}}$ och 1 och mittpunkten $(2,-1,1)$.
Högsta punkten är <u>$(2,-1,2)$</u> och lägsta <u>$(2,-1,0)$</u>.

<u>Alternativt</u> kan Lagrange's metod användas
Den kontinuerliga funktionen $f(x,y,z) = z$ antar
på ellipsen, som är sluten och begränsad, maximum
och minimum.

Låt $L(x,y,z,\lambda) = z - \lambda(x^2 + 2y^2 + z^2 - 4x + 4y - 2z + 6)$
Vi söker de kritiska punkterna till L.

$$\begin{cases} D_1 L(x,y,z,\lambda) = -2\lambda x + 4\lambda = 0 & \lambda(4-2x) = 0 \\ D_2 L(x,y,z,\lambda) = -4\lambda y - 4\lambda = 0 & -4\lambda(1+y) = 0 \\ D_3 L(x,y,z,\lambda) = 1 - 2\lambda z + 2\lambda = 0 & 1 + 2\lambda = 2\lambda z \\ D_4 L(x,y,z,\lambda) = -(x^2 + 2y^2 + z^2 - 4x + 4y - 2z + 6) = 0 & \end{cases}$$

$\lambda = 0$ uppfyller inte den 3. ekvationen $\Rightarrow x = 2,\ y = -1$

Insättning i den 4. ekvationen medför att
$-(4 + 2 + z^2 - 8 - 4 - 2z + 6) = 0 \qquad z^2 - 2z = 0 \qquad z = 2,\ z = 0$
Den tredje ekv. ger då $\lambda = \frac{1}{2}$ resp. $\lambda = -\frac{1}{2}$.
Svar: Punkterna <u>$(2,-1,2)$</u> resp. <u>$(2,-1,0)$</u>.

9. Antag att A är symmetrisk, A har egenvärden 0 och 5 och $\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$ är en egenvektor som motsv. egenvärdet 5. Låt $P=\begin{pmatrix}1 & c\\ 2 & d\end{pmatrix}$. A är diagonaliserbar, eftersom A är symmetrisk; $P^{-1}AP=\begin{pmatrix}5 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}$. $\quad (*)$

A:s egenvektorer $\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$ och $\begin{pmatrix}c\\d\end{pmatrix}$ är ortogonala $\Rightarrow$ $c+2d=0 \Rightarrow c=-2d$. Vi kan skriva

$P=\begin{pmatrix}1 & -2d\\ 2 & d\end{pmatrix}$. Från $(*)$ följer att $AP=P\begin{pmatrix}5 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}$

$=\begin{pmatrix}1 & -2d\\ 2 & d\end{pmatrix}\begin{pmatrix}5 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}5 & 0\\ 10 & 0\end{pmatrix}$. Vi får att

$$A=\begin{pmatrix}5 & 0\\ 10 & 0\end{pmatrix}P^{-1}=\begin{pmatrix}5 & 0\\ 10 & 0\end{pmatrix}\frac{1}{5d}\begin{pmatrix}d & 2d\\ -2 & 1\end{pmatrix}=\underline{\underline{\begin{pmatrix}1 & 2\\ 2 & 4\end{pmatrix}}}$$

10. a) $T(x,y,z)=(x+y,\,y+z)=(0,0) \iff \begin{cases}x+y=0\\ y+z=0\end{cases}$

$\iff x=t,\ y=-t,\ z=t,\ t\in\mathbb{R} \iff (x,y,z)=t(1,-1,1)$

En bas för nollrummet är $\underline{\{(1,-1,1)\}}$

b) En vektor (u,v) är i T:s värderum $\iff (u,v)=T(x,y,z)$ för någon vektor (x,y,z)

$\begin{cases}u=x+y\\ v=y+z\end{cases} \iff \begin{cases}x=u-y\\ y=v-z\end{cases}$ Låt $z=t$. Då är

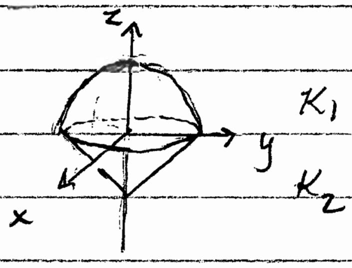
$y=v-t$, $x=u-(v-t)=u-v+t$ och $z=t$

Alltså $(u,v)=T(u-v+t,\ v-t,\ t)$ där t kan väljas godtyckligt. Värderummet är hela $\mathbb{R}^2$.

En bas för värderummet är till ex. $\underline{\underline{\{(1,0),(0,1)\}}}$.

11. Ytan är sluten. Enligt Gauss sats är

$$\iint_S \mathbf{F}\cdot\mathbf{N}\,dS=\iiint_K \operatorname{div}\mathbf{F}\,dV=\iiint_K (y+z)\,dV$$



$$=\iiint_K z\,dV \quad \text{p.g.a. symmetrin.}$$

$K_1: \; x^2+y^2+z^2 \le 1, \quad z \ge 0$

Med sfäriska koordinater $\begin{cases} x = \rho\cos\theta\sin\varphi \\ y = \rho\sin\theta\sin\varphi \\ z = \rho\cos\varphi \end{cases}$

$$\iiint_{K_1} z\,dV = \iiint_{A} \rho\cos\varphi\,\rho^2\sin\varphi\,d\rho\,d\varphi\,d\theta$$ där A är området $0 \le \rho \le 1,\; 0 \le \varphi \le \frac{\pi}{2},\; 0 \le \theta \le 2\pi$

Vi får $$\iiint_{K_1} z\,dV = \int_0^1 \rho^3\,d\rho \int_0^{\pi/2} \frac{1}{2}\sin 2\varphi\,d\varphi \int_0^{2\pi} d\theta$$

$$= \frac{1}{4}\cdot 2\pi\cdot\frac{1}{4}\Big[-\cos 2\varphi\Big]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{4}$$

$K_2: \; -1+\sqrt{x^2+y^2} \le z \le 0$

$$\iiint_{K_2} z\,dV = \iint_{B}\left(\int_{-1+\sqrt{x^2+y^2}}^{0} z\,dz\right)dx\,dy$$ där B är cirkelskivan $x^2+y^2 \le 1$

$$= \iint_{B} -\frac{1}{2}\left(-1+\sqrt{x^2+y^2}\right)^2 dx\,dy = -\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\!\!\int_0^1 (-1+r)^2\, r\,d\theta\,dr$$ (polära koord.)

$$= -\frac{1}{2}\cdot 2\pi\int_0^1 (r^3-2r^2+r)\,dr = -\frac{\pi}{12}$$

$$\iint_S F\cdot N\,dS = \frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{12} = \underline{\underline{\frac{\pi}{6}}}$$