Institutionen för Matematik
KTH
Kirsti Mattila

Tentamensskrivning, Analytiska metoder och linjär algebra, 5B1141

Onsdagen den 15 december 2004, kl 14.00-19.00

Preliminära betygsgränser för 3, 4 och 5 är 20, 27 och 35 poäng.
Inga hjälpmedel är tillåtna.

. . . .

1. Bestäm och klassificiera de kritiska punkterna till funktionen $f(x, y) = xy + x^{-1} + y^{-1}$. (3p)

2. Beräkna dubbelintegralen $\iint_D \cos\sqrt{x^2+y^2}\,dxdy$ där D är området $x^2 + y^2 \leq 1, \quad |x| \leq y$. (3p)

3. Bestäm en bas för vektorrummet $\{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 : 4x - 3y + z = 0\}$. (3p)

4. Antag att S och T är linjära avbildningar $\mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$; S är 90 graders rotation moturs och T är speglingen i linjen $y = x$.
a) Bestäm matrisen till den sammansatta avbildningen $T \circ S$ i standardbasen.
b) Vilken avbildning är $T \circ S$? (3p)

5. Funktionen $f : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$ har kontinuerliga partiella derivator av andra ordningen och den uppfyller ekvationen $x^2D_{11}f + y^2D_{22}f + xD_1f + yD_2f = 0$. Visa att funktionen h som definieras genom $h(s, t) = f(e^s, e^t)$ uppfyller ekvationen $D_{11}h + D_{22}h = 0$. (4p)

6. Låt $\mathbf{F}(x, y) = ((1 + y^2)x^{-3}, -y(1 + 4x^2)x^{-2})$ där $x \neq 0$.
a) Är vektorfältet $\mathbf{F}$ konservativt?
b) Beräkna $\int_C (1 + y^2)x^{-3}\,dx - y(1 + 4x^2)x^{-2}\,dy$ längs kurvan $x^2 - 4x + y + 2 = 0$ från $(1, 1)$ till $(2, 2)$. (4p)

7. Beräkna flödesintegralen $\iint_S \mathbf{F} \cdot \mathbf{N}\,dS$ där $\mathbf{F}(x, y, z) = (0, xy, z^2)$. Ytan S är den slutna yta som begränsas av paraboloiden $z = x^2 + y^2$ och planet $z = 1$; $\mathbf{N}$ är den utåtriktade enhetsnormalen på S. (4p)

v.g. vänd

8. Vi betraktar matriser $M_a = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & a \end{pmatrix}$, där a är en reell konstant. För vilka värden av a är M_a diagonaliserbar? (5p)

9. Bestäm de punkter på kurvan $x^2 + xy + y^2 = 3$ i planet som ligger närmast resp. längst från origo. (5p)

10. a) Visa att ekvationen $x^2 - ze^{x+y+z} = 0$ definierar i en omgivning av origo en yta $z = f(x, y)$.

b) Bestäm ekvationen för ytans tangentplan i origo. (5p)

11. Antag att a och b, $a < b$, är positiva konstanter. Beräkna trippelintegralen

$$\iiint_K (x^2 + y^2)\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}\, dx\, dy\, dz$$

där K är kroppen som begränsas av sfärerna $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ och $x^2 + y^2 + z^2 = b^2$. (5p)

Lösningar till tentamen den 15 december 2004
Analytiska metoder och linjär algebra, 5B1141

1. Vi bestämmer de kritiska punkterna till $f(x,y) = xy + x^{-1} + y^{-1}$. $D_1 f(x,y) = y - x^{-2}$ och $D_2 f(x,y) = x - y^{-2}$. Vi får ekvationerna $x^2 = y^{-1}$ och $x = y^{-2}$. Det följer att $y^4 - y = 0$. För $y = 0$ är funktionen inte definierad. Vi får en kritisk punkt $(1,1)$, $f(1,1) = 3$. Vidare är $AC - B^2 = \frac{4}{x^3y^3} - 1$. I punkten $(1,1)$ är $AC - B^2 = 3$ som är > 0; också $A > 0$. Svar: Punkten $(1,1)$ är en lokal minimipunkt.

2. Olikheten $|x| \le y$ är ekvivalent med $y \ge 0, -y \le x \le y$. I polära koordinater är integralen $\iint_D \cos\sqrt{x^2+y^2}\,dxdy = \int_0^1 r\cos r(\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} d\theta)\,dr = \frac{\pi}{2}\int_0^1 r\,d(\sin r) = \frac{\pi}{2}([r\sin r]_0^1 - \int_0^1 \sin r\,dr) = \frac{\pi}{2}(\sin 1 + [\cos r]_0^1 - 1) = \frac{\pi}{2}(\sin 1 + \cos 1 - 1)$.

3. Låt $x = s$ och $y = t$. Då är $z = 3t - 4s$ .Vi får $(x,y,z) = (s,t,-4s+3t) = s(1,0,-4) + t(0,1,3)$. Varje vektor i vektorrummet kan skrivas som en linjärkombination av vektorerna $(1,0,-4)$ och $(0,1,3)$ som är linjärt oberoende och uppfyller ekvationen. Svar: En bas är $\{(1,0,-4),(0,1,3)\}$.

4. Rotationen S avbildar $(1,0)$ på $(0,1)$ och $(0,1)$ på $(-1,0)$. Speglingen avbildar $(1,0)$ på $(0,1)$ och $(0,1)$ på $(1,0)$. Matriserna till S resp. T är $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ resp. $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ Produkten $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ är matrisen till $T \circ S$. Den sammansatta avbildningen avbildar en vektor (x,y) på vektorn $(x,-y)$. $T \circ S$ är spegling i $x-$axeln.

5. Låt $G(s,t) = (e^s, e^t)$. Dess Jacobimatris är $\begin{pmatrix} e^s & 0 \\ 0 & e^t \end{pmatrix}$. Eftersom $h = f \circ G$ får vi enligt kedjeregeln $D_1 h(s,t) = e^s D_1 f(e^s,e^t)$ och $D_2 h(s,t) = e^t D_2 f(e^s,e^t)$. Vidare är $D_{11}h(s,t) = e^s D_1 f(e^s,e^t) + e^{2s} D_{11} f(e^s,e^t)$ och $D_{22}h(s,t) = e^t D_2 f(e^s,e^t) + e^{2t} D_{22} f(e^s,e^t)$. Genom att addera ekvationerna blir vänsterledet $= D_{11}h + D_{22}h$ och högerledet $= 0$ när man tar hänsyn till antagandet $x^2 D_{11} f + y^2 D_{22} f + x D_1 f + y D_2 f = 0$ med $x = e^s$ och $y = e^t$.

6. a) Vektorfältet F uppfyller villkoret $D_1 F_2 = D_2 F_1\,(= 2yx^{-3})$. F är konservativt i området $x > 0$ och i området $x < 0$.

b) Vi antar att en funktion u uppfyller $D_1 u(x,y) = (1+y^2)x^{-3}$. Då är $u(x,y) = -\frac{1}{2}(1+y^2)x^{-2} + g(y)$ för någon funktion g. Derivering m.a. på y ger $D_2 u(x,y) = -yx^{-2} + g'(y) = -y(1+4x^2)x^{-2}$. Det följer att $g'(y) = -4y$ och vidare att $g(y) = -2y^2$ (+konstant). Funktionen $u(x,y) = -\frac{1}{2}x^{-2} - \frac{1}{2}y^2x^{-2} - 2y^2$ är en potential till vektorfältet. $\int_C F \cdot dr = u(2,2) - u(1,1) = -\frac{45}{8}$.

7. Enligt Gauss' sats är $\iint_S \mathbf{F} \cdot \mathbf{N}\,dS = \iiint_K \operatorname{div} \mathbf{F}\,dx\,dy\,dz$ där K är området innanför S. Divergensen av $\mathbf{F}$ är $= y + 2z$. Eftersom integralen $\iiint_K y\,dx\,dy\,dz = 0$ pga. symmetrin får vi

$$\iint_S \mathbf{F}\cdot\mathbf{N}\,dS = 2\iiint_K z\,dx\,dy\,dz = 2\iint_D \left(\int_{x^2+y^2}^1 z\,dz\right)dx\,dy = \iint_D (1-(x^2+y^2)^2)\,dx\,dy$$

där D är området $x^2+y^2 \le 1$. Med polära koordinater blir integralen $= \int_0^{2\pi}(\int_0^1 (1-r^4)r\,dr)\,d\theta) = 2\pi[\frac{r^2}{2} - \frac{r^6}{6}]_0^1 = \underline{\frac{2\pi}{3}}$.

8. a) Vi räknar egenvärden: $\det(M_a - \lambda I) = \det\begin{pmatrix} -\lambda & 0 & 0 \\ 0 & -\lambda & 0 \\ 3 & 0 & a-\lambda \end{pmatrix} = \lambda^2(a-\lambda)$.

Determinanten $= 0$ om $\lambda = 0$ eller $\lambda = a$.

Egenvektorerna som motsvarar egenvärdet 0 uppfyller ekvationen $M_aX = \bar{0}$. Låt $X = (x \quad y \quad z)^T$. Vi får ekvationen $3x + az = 0$. Lösningarna är $x = -as, y = t, z = -3s$, dvs. $(x,y,z) = s(-a,0,3) + t(0,1,0)$ där s och t är godtyckliga reella tal. Vi har två linjärt oberoende egenvektorer: $u = (-a,0,3)$ och $v = (0,1,0)$.

1) Om $a = 0$, finns inte tre linjärt oberoende egenvektorer. M_a är inte diagonaliserbar.

2) Om $a \neq 0$ så finns en egenvektor w så att $M_aw = aw$ och $\{u,v,w\}$ är linjärt oberoende. M_a är diagonaliserbar.

9. Vi använder Lagrange's metod. Låt $L(x,y,\lambda) = x^2+y^2+\lambda(x^2+xy+y^2-3)$. Vi söker de kritiska punkterna till L. $(1) D_1L = 2x + 2\lambda x + \lambda y = 0$, $\quad (2) D_2L = 2y + \lambda x + 2\lambda y = 0$, $\quad (3) D_3L = x^2+xy+y^2-3 = 0$.

Från (1) och (2) får vi $y(1) - x(2) = \lambda(y^2-x^2) = 0$. $\lambda = 0$ ger $x = y = 0$, men origo uppfyller inte (3). Om $\lambda \neq 0$ så är $y = \pm x$. Substitution i ekvationen (3) ger

a) om $y = x : x^2 = 1$. Vi får punkterna $(1,1)$ och $(-1,-1)$.

b) om $y = -x : x^2 = 3$. Vi får punkterna $\pm(\sqrt{3}, -\sqrt{3},)$.

Avståndet $\sqrt{x^2+y^2}$ är a) $\sqrt{2}$ b) $\sqrt{6}$. <u>Punkterna $(1,1)$ och $(-1,-1)$ är närmast origo.</u> <u>Punkterna $\pm(\sqrt{3},-\sqrt{3},)$ är längst ifrån origo.</u>

10. a) Låt $F(x,y,z) = x^2 - ze^{x+y+z}$. Eftersom $D_3F = (-1-z)e^{x+y+z}$ och $D_3F(0,0,0) = -1 \neq 0$ definierar ekvationen enligt implicitfunktionssatsen en yta $z = f(x,y)$ i en omgivning av origo.

b) Gradienten av F är $(2x - ze^{x+y+z}, -ze^{x+y+z}, (-1-z)e^{x+y+z})$; $\operatorname{grad}F(0,0,0) = (0,0,-1)$ är en normal till tangentplanet. Planets ekvation är $0(x-0)+0(y-0)-(z-0) = 0$, dvs. $\underline{z = 0}$.

11. I sfäriska koordinater är

$$\iiint_K (x^2+y^2)\sqrt{x^2+y^2+z^2}\,dx\,dy\,dz = \int_0^{2\pi}\left(\int_a^b\left(\int_0^\pi \rho^2\sin^2\phi\rho\rho^2\sin\phi\,d\phi\right)d\rho\right)d\theta$$

$$= \int_0^{2\pi}\left(\int_a^b \rho^5\left(\int_0^\pi \sin^3\phi\,d\phi\right)d\rho\right)d\theta = \frac{2\pi(b^6-a^6)}{6}[-\cos\phi + \frac{\cos^3}{3}\phi]_0^\pi = \underline{\frac{4\pi(b^6-a^6)}{9}}$$