Lösningar till tentamen den 27/8 2005
Analytiska metoder och linjär algebra, 5B1141 högre årskurs

1. De partiella derivatorna av $f(x,y) = x^2y - y^2 - 2xy$ är $D_1 f(x,y) = 2xy - 2y$ och $D_2 f(x,y) = x^2 - 2y - 2x$.

Vi får ekv. systemet $\begin{cases} 2y(x-1) = 0 \\ x^2 - 2y - 2x = 0 \end{cases} \Rightarrow y = 0$ eller $x = 1$

Om $y = 0$, $x^2 - 2x = 0$; $x = 0$ eller $x = 2$.

Om $x = 1$, $y = -\frac{1}{2}$. De kritiska punkterna är $(0,0)$, $(2,0)$ och $(1, -\frac{1}{2})$.

Vi räknar $AC - B^2 = D_{11}f\, D_{22}f - (D_{12}f)^2 = 2y(-2) - (2x-2)^2 = -4y - 4(x-1)^2$.

I punkterna $(0,0)$ och $(2,0)$ är $AC - B^2 = -4 < 0$.

Dessa är sadelpunkter. $f(0,0) = f(2,0) = 0$.

I punkten $(1, -\frac{1}{2})$ $AC - B^2 = 2 > 0$ och $A = -1 < 0$

Punkten är en lokal maximumpunkt. $f(1, -\frac{1}{2}) = \frac{1}{4}$.

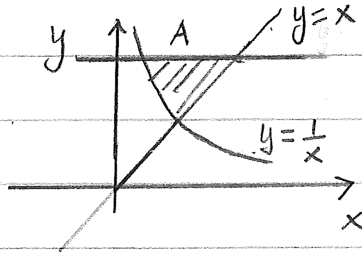
---

2. Cylindern kan parametriseras $x = 2\cos\theta$, $y = 2\sin\theta$, $0 \le \theta \le 2\pi$. Skärningskurvan har param. framställning

$x = 2\cos\theta$, $y = 2\sin\theta$, $z = 1 - 6\sin\theta - 2\cos\theta$, $0 \le \theta \le 2\pi$.

---

3. Vi integrerar först m.a. på x,



$\frac{1}{y} \le x \le y$ och $1 \le y \le 2$.

$$\iint_A \frac{y^2}{x^2}\,dx\,dy = \int_1^2 \left(\int_{1/y}^{y} \frac{y^2}{x^2}\,dx \right) dy$$

$$= \int_1^2 \left[-\frac{y^2}{x} \right]_{x=1/y}^{x=y} dy = \int_1^2 (-y + y^3)\,dy = \left[-\frac{1}{2}y^2 + \frac{1}{4}y^4 \right]_1^2 = \underline{\underline{\frac{9}{4}}}$$

4. a) $D_1 f(x,y) = 4y - 6x = 0 \qquad D_2 f(x,y) = 4x = 0$

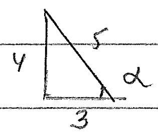
Origo är den enda kritiska punkten (i området $x^2+y^2<1$).

$\underline{f(0,0) = 0}$.

b) Vi undersöker randen $x^2+y^2=1$. Låt $x = \cos\theta$, $y = \sin\theta$, $0 \le \theta \le 2\pi$.

$$f(x,y) = h(\theta) = 4\cos\theta\sin\theta - 3\cos^2\theta$$
$$= 2\sin 2\theta - \frac{3}{2}(\cos 2\theta + 1)$$

$h'(\theta) = 4\cos 2\theta + 3\sin 2\theta \qquad h'(\theta) = 0$ om $\tan 2\theta = -\frac{4}{3}$.



$\tan\alpha = \frac{4}{3}$, $\sin\alpha = \frac{4}{5}$, $\cos\alpha = \frac{3}{5}$.

Vi har två möjliga värden för $\sin 2\theta$ resp. $\cos 2\theta$:

$\sin 2\theta = \frac{4}{5}$, $\cos 2\theta = -\frac{3}{5} \Rightarrow h(\theta) = \frac{8}{5} + \frac{9}{10} - \frac{3}{2} = \underline{1}$

$\sin 2\theta = -\frac{4}{5}$, $\cos 2\theta = \frac{3}{5} \Rightarrow h(\theta) = -\frac{8}{5} - \frac{9}{10} - \frac{3}{2} = \underline{\underline{-4}}$

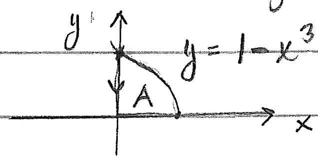
Ändpunkterna: $h(0) = h(2\pi) = \underline{-3}$

Största värdet av f är 1 och minsta värdet $= -4$.

---

5. Enligt Green's formel $\oint_C F\cdot dr = \iint_A (D_1F_2 - D_2F_1)\,dx\,dy$

där A är området innanför kurvan C.



$F(x,y) = (\sqrt{1+x},\ 2xy)$

$D_1F_2 - D_2F_1 = 2y$

$$\oint_C \sqrt{1+x}\,dx + 2xy\,dy = \iint_A 2y\,dx\,dy = \int_0^1\left(\int_0^{1-x^3} 2y\,dy\right)dx$$
$$= \int_0^1 (1-x^3)^2\,dx = \int_0^1 (1 - 2x^3 + x^6)\,dx = \underline{\underline{\frac{9}{14}}}$$

---

6. Vi använder divergenssatsen

$\operatorname{div} F(x,y,z) = 2x - 2x + 3z^2 = 3z^2$

$\iint_S F\cdot n\,dS = \iiint_K 3z^2\,dV$ där K är klotet $x^2+y^2+z^2 \le 1$.

v.g. vänd

6. (forts.) Med sfäriska koordinater $x = \varrho \cos\theta \sin\varphi$, $y = \varrho \sin\theta \sin\varphi$, $z = \varrho \cos\varphi$ blir integralen

$$\iiint_B 3\varrho^2 \cos^2\varphi \; \varrho^2 \sin\varphi \, d\varrho \, d\varphi \, d\theta$$

där B är området $0 \leq \varrho \leq 1$, $0 \leq \varphi \leq \pi$, $0 \leq \theta \leq 2\pi$.

$$\iint_S F \cdot n \, dS = 3\int_0^1 \varrho^4 \, d\varrho \int_0^{\pi} \sin\varphi \cos^2\varphi \, d\varphi \int_0^{2\pi} d\theta$$

$$= \frac{3}{5} \cdot 2\pi \left[-\frac{1}{3} \cos^3\varphi \right]_0^{\pi} = \underline{\underline{\frac{4\pi}{5}}}$$

---

7. Villkoret för att vektorfältet $F(x,y,z) = (2axy^3z,\ bx^2y^2z + 4z,\ ax^2y^3 + 4y)$ är konservativt är att

$$\begin{cases} D_1 F_2 = D_2 F_1 & \text{dvs.} \quad 2bxy^2z = 6axy^2z \iff 2b = 6a \\ D_2 F_3 = D_3 F_2 & \text{dvs.} \quad 3ax^2y^2 + 4 = bx^2y^2 + 4 \iff 3a = b \\ D_1 F_3 = D_3 F_1 & \text{dvs.} \quad 2axy^3 = 2axy^3 \end{cases}$$

F är konservativt $\iff b = 3a$.

För att $F = \operatorname{grad} u$, skall $D_1 u = 2axy^3z$, $D_2 u = 3ax^2y^2z + 4z$, $D_3 u = ax^2y^3 + 4y$.

Första villkoret medför $u(x,y,z) = ax^2y^3z + g(y,z)$

$\Rightarrow D_2 u = 3ax^2y^2z + D_1 g(y,z) = 3ax^2y^2z + 4z$

Då måste $D_1 g(y,z) = 4z \Rightarrow g(y,z) = 4yz + h(z)$,

$u(x,y,z) = ax^2y^3z + 4yz + h(z)$.

$D_3 u = ax^2y^3 + 4y$ om $h'(z) = 0$, dvs $h(z) =$ konstant

$$\underline{\underline{u(x,y,z) = ax^2y^3z + 4yz + C}}$$

---

8. Vi söker lösningar till ekvationer a) $AX = \bar{0}$

b) $AX = \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$ där u och v är godtyckliga tal.

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix}.$$

a) Vi får med Gauss elimination

v.g. vänd

8. (forts.)

$$\overset{-3}{\curvearrowright}\begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 & | & 0 \\ 1 & -1 & 3 & | & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0 & 2 & -8 & | & 0 \\ 1 & -1 & 3 & | & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 & | & 0 \\ 0 & 1 & -4 & | & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & | & 0 \\ 0 & 1 & -4 & | & 0 \end{pmatrix}$$ Låt $z = t$. Vi får $x = t$, $y = 4t$

Nollrummet är $\{(x, y, z) = t(1, 4, 1)$, t är reellt tal$\}$

b) $AX = \binom{u}{v} \iff \binom{u}{v}$ tillhör kolonnrummet av A

Dimensionen av kolonnrummet $\text{lin}\left\{\binom{3}{1}, \binom{-1}{-1}, \binom{1}{3}\right\} \subset \mathbb{R}^2$ är högst 2. Till ex. $(3,1)$ och $(1,3)$ är linj. oberoende vektorer $\Rightarrow$ dimensionen $= 2$. Kolonnrummet $= \mathbb{R}^2$.

T är surjektiv.

9. Låt T vara den ortogonala projektionen på linjen $x = t$, $y = 0$, $z = 2t$ och låt $T(x, y, z) = (a, b, c)$.

1) (a, b, c) är på linjen $\Rightarrow$ $b = 0$, $c = 2a$.

2) Vektorn $(x, y, z) - (a, b, c)$ är vinkelrät mot linjen, dvs. $(x-a, y-b, z-c) \cdot (1, 0, 2) = 0$.

$\Rightarrow x - a + 2(z - c) = 0 \qquad x + 2z = a + 2c = 5a$

Vi får $a = \frac{1}{5}(x + 2z)$, $b = 0$, $c = \frac{2}{5}(x + 2z)$

$$T(x, y, z) = \left(\frac{x}{5} + \frac{2z}{5}, 0, \frac{2x}{5} + \frac{4z}{5}\right).$$

T:s matris är $\begin{pmatrix} \frac{1}{5} & 0 & \frac{2}{5} \\ 0 & 0 & 0 \\ \frac{2}{5} & 0 & \frac{4}{5} \end{pmatrix}$

10. Gradientvektorn är riktn. vektor till ytans normallinje.

$(y + z)^2 + (z - x)^2 = 9 \iff \underbrace{x^2 - 2xz + y^2 + 2yz + 2z^2}_{F(x, y, z)} = 9$

$\text{grad } F = (2x - 2z, 2y + 2z, -2x + 2y + 4z)$

Normallinjen är parallel med yz-planet $\iff \text{grad } F \cdot (1, 0, 0) = 0$.

dvs $2x - 2z = 0$. $\begin{cases} (y + z)^2 + (z - x)^2 = 9 \\ z = x \end{cases} \Rightarrow$

v. g. vänd

10. (forts.)

$(y+x)^2 = 9 \qquad y+x = \pm 3 \quad \Rightarrow \quad y = \pm 3 - x.$

Svar: I punkterna $(x, \pm 3 - x, x)$, $x \in \mathbb{R}$ är normallinjen parallell med yz-planet.

---

11. Vi deriverar ekvationerna $e^u \cos v - x = 0$ och $e^u \sin v - y = 0$ där $u = f(x,y)$, $v = g(x,y)$, m.a. på x resp. y.

(1) $e^u D_1 u \cos v - e^u \sin v \, D_1 v - 1 = 0$

(2) $e^u D_1 u \sin v + e^u \cos v \, D_1 v = 0$

(3) $e^u D_2 u \cos v - e^u \sin v \, D_2 v = 0$

(4) $e^u D_2 u \sin v + e^u \cos v \, D_2 v - 1 = 0$

$\cos v \,(1) + \sin v \,(2) \Rightarrow e^u D_1 u (\cos^2 v + \sin^2 v) - \cos v = 0$

$D_1 u = e^{-u} \cos v$

$-\sin v \,(1) + \cos v \,(2) \Rightarrow e^u D_1 v + \sin v = 0$

$D_1 v = -e^{-u} \sin v$

På samma sätt får vi från (3) och (4)

$e^u D_2 u - \sin v = 0 \qquad D_2 u = e^{-u} \sin v$

$e^u D_2 v - \cos v = 0 \qquad D_2 v = e^{-u} \cos v$

Vi får $\underline{D_1 u \, D_1 v + D_2 u \, D_2 v} = -e^{-2u} \cos v \sin v + e^{-2u} \cos v \sin v = \underline{0}$ $\quad$ Konstanten $= 0$.
