## Lösningar till tentamen den 19 december 2005
## Analytiska metoder och linjär algebra 5B1141

1. Gradienten till $f(x,y,z) = x^2 + y^2 - 2z^2 - 3$ är en normal till planet; $\text{grad}\, f(x,y,z) = (2x, 2y, -4z)$.
En normal i punkten $(2,1,1)$ är $(2,1,-2)$.
Planets ekvation är $2(x-2) + y - 1 - 2(z-1) = 0$
dvs. $\underline{\underline{2x + y - 2z - 3 = 0}}$.

2. $D_1 f(x,y) = 4x - 4y^2$, $D_2 f(x,y) = 2y - 8xy$
Ekv. systemet $x - y^2 = 0$, $y(1-4x) = 0$ har lösningarna
$(0,0)$, $(\frac{1}{4}, \pm\frac{1}{2})$ som är de kritiska punkterna.
$D_{11} f(x,y) = 4$, $D_{12} f(x,y) = -8y$, $D_{22} f(x,y) = 2 - 8x$
$AC - B^2 = 4(2-8x) - 64y^2 = 8(1 - 4x - 8y^2)$
I origo $AC - B^2 = 8 > 0$ och $A = 4 > 0$
$f(0,0) = 0$. Origo är en <u>lokal minimipunkt</u>.
I punkterna $(\frac{1}{4}, \pm\frac{1}{2})$ $AC - B^2 = -8 < 0$,
$f(\frac{1}{4}, \pm\frac{1}{2}) = \frac{1}{8}$. Dessa är <u>sadelpunkter</u>.

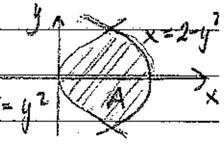
3. Underrummet är radrummet för matrisen

$$\begin{matrix} \\ 2\cdot \\ 2\cdot \end{matrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 10 & -4 \\ \frac{1}{2} & 0 & 1 & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 3 & -1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 10 & -4 \\ -1 & 1 & 6 & -2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 8 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Radrummet ändras inte i elementära radoperationer $\Rightarrow$
<u>Dimensionen av underrummet = 2.</u>

4. Låt $u = (1,1)$ och $v = (-2,1)$ vara basvektorerna.
Vi bestämmer talen $a, b, c$ och $d$ så att
$Tu = au + bv$, $Tv = cu + dv$
$Tu = T(1,1) = (2,3)$ och $Tv = T(-2,1) = (-7,0)$ $\Rightarrow$
$(2,3) = a(1,1) + b(-2,1) = (a - 2b, a + b)$ $\Rightarrow a = \frac{8}{3}$, $b = \frac{1}{3}$
$(-7,0) = c(1,1) + d(-2,1) = (c - 2d, c + d)$ $\Rightarrow c = -\frac{7}{3}$, $d = \frac{7}{3}$
T:s matris i basen $\{u, v\}$ är $\underline{\underline{\begin{pmatrix} \frac{8}{3} & -\frac{7}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{7}{3} \end{pmatrix}}}$

5. Skärningspunkterna för kurvorna $x = y^2$, $x = 2 - y^2$
($y^2 = 2 - y^2 \Rightarrow y = \pm 1$) är $(1,1)$ och $(1,-1)$.
Eftersom $|y| e^x = |-y| e^x$



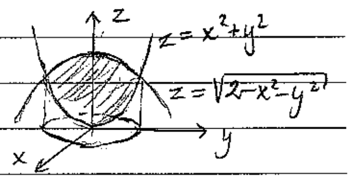

$$\iint_A |y| e^x \, dx\, dy = \int_{-1}^{1} \left( \int_{y^2}^{2-y^2} |y| e^x \, dx \right) dy$$
$$= 2\int_0^1 y \left( \int_{y^2}^{2-y^2} e^x \right) dy = 2\int_0^1 y(e^{2-y^2} - e^{y^2})\, dy = \left[ -e^{2-y^2} - e^{y^2} \right]_0^1$$
$$= -e - e + e^2 + 1 = e^2 - 2e + 1 = \underline{\underline{(e-1)^2}}$$

6. Låt $g(x,y) = (x + y^2, x^2 + y)$. Då är
$f(x,y) = h(g(x,y))$ dvs $f = h \circ g$.
Från kedjeregeln följer att $D_1 f = D_1 h + 2x\, D_2 h$, (1)
$D_2 f = 2y\, D_1 h + D_2 h$. (2)
Multiplikation med $2y$ resp. $2x$ ger
$2y\, D_1 f = 2y\, D_1 h + 4xy\, D_2 h$ (3)
$2x\, D_2 f = 4xy\, D_1 h + 2x\, D_2 h$. (4)
$\Rightarrow$ $\underline{(1-2y)\, D_1 f + (1-2x)\, D_2 f} = (1) - (3) + (2) - (4) =$
$D_1 h + \cancel{2x\, D_2 h} - 2y\, \cancel{D_1 h} - 4xy\, D_2 h + \cancel{2y\, D_1 h} + D_2 h$
$- 4xy\, D_1 h - \cancel{2x\, D_2 h} = (1 - 4xy)(D_1 h + D_2 h) = \underline{\underline{0}}$
eftersom $D_1 h + D_2 h = 0$ enligt antagandet.

7. För ytan $z = \frac{1}{2}x^2 + y = g(x,y)$ är
$D_1 g(x,y) = x$, $D_2 g(x,y) = 1$ och
$dS = \sqrt{1+x^2+1}\,dx\,dy = \sqrt{2+x^2}\,dx\,dy$
Triangeln $T$ i $xy$-planet är: $0 \le y \le 3x$, $0 \le x \le 1$. Ytans area är

$$\int_0^1 \left( \int_0^{3x} \sqrt{2+x^2}\,dy \right) dx = \int_0^1 3x\sqrt{2+x^2}\,dx$$
$$= \left[ (2+x^2)^{\frac{3}{2}} \right]_0^1 = 3^{\frac{3}{2}} - 2^{\frac{3}{2}} = \underline{\underline{3\sqrt{3} - 2\sqrt{2}}}$$

8. Vi bestämmer skärningskurvan för paraboloiden $z = x^2+y^2$ och halvsfären $z = \sqrt{2-x^2-y^2}$.




$$2-x^2-y^2 = (x^2+y^2)^2 \Rightarrow$$
$$(x^2+y^2)^2 + (x^2+y^2) - 2 = 0 \Rightarrow x^2+y^2 = -\frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4}+2}$$
$$= \frac{1}{2}(-1 \pm 3) \Rightarrow x^2+y^2 = 1$$

$$\text{Volymen} = \iint_{x^2+y^2\le 1} \left(\sqrt{2-x^2-y^2} - x^2 - y^2\right) dx\,dy \qquad \begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \end{cases}$$
$$= \int_0^1 \left( \int_0^{2\pi} \left(\sqrt{2-r^2} - r^2\right) r\,d\theta \right) dr = 2\pi \int_0^1 \left( r(2-r^2)^{1/2} - r^3 \right) dr$$
$$= 2\pi \left[ -\frac{1}{3}(2-r^2)^{\frac{3}{2}} - \frac{1}{4}r^4 \right]_0^1 = 2\pi \left( -\frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{3}\cdot 2\sqrt{2} \right)$$
$$= \underline{\underline{\frac{(8\sqrt{2}-7)\pi}{6}}}$$

9. $\det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & a \\ a & 1-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)^2 - a^2 = \lambda^2 - 2\lambda + 1 - a^2$.

Ekvationen $\lambda^2 - 2\lambda + 1 - a^2 = 0$ ger egenvärden $\lambda = 1 \pm a$.
Vi löser ekvationerna $(A - \lambda I)X = \bar{0}$.

$\lambda = 1+a \Rightarrow A - \lambda I = \begin{pmatrix} -a & a \\ a & -a \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ $\quad X = t\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $t \in \mathbb{R}$

$\lambda = 1-a \Rightarrow A - \lambda I = \begin{pmatrix} a & a \\ a & a \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ $\quad X = t\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$, $t \in \mathbb{R}$

Egenvektorerna $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ och $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ är ortogonala (eftersom $A$ är symmetrisk). $A$ kan diagonaliseras med matrisen $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$. Matrisen $\underline{\underline{P = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}}}$ är ortogonal ($P^{-1} = P^T$)
och $\underline{\underline{P^T A P = \begin{pmatrix} 1+a & 0 \\ 0 & 1-a \end{pmatrix}}}$.

10 a) Vektorfältet $F(x,y,z) = \left( \frac{1}{y}, \frac{1}{z} - \frac{x}{y^2}, -\frac{y}{z^2} \right)$ har potential:

$$D_1 u = \frac{1}{y} \Rightarrow u(x,y,z) = \frac{x}{y} + g(y,z)$$
$$D_2 u = -\frac{x}{y^2} + D_1 g(y,z) = \frac{1}{z} - \frac{x}{y^2} \Rightarrow D_1 g(y,z) = \frac{1}{z}$$
$$\Rightarrow g(y,z) = \frac{y}{z} + h(z)$$
$$D_3 u = D_2 g = -\frac{y}{z^2} + h'(z) = -\frac{y}{z^2} \Rightarrow h(z) = C$$
$$u(x,y,z) = \frac{x}{y} + \frac{y}{z} + C \quad \text{om } y \ne 0,\ z \ne 0.$$

Integralen $I = \int F \cdot dr$ är oberoende av vägen i områden där $y$ och $z$ är båda positiva eller negativa och i områden där $y$ och $z$ har olika tecken.

b) $C$: $r(t) = (\sin 2t, \cos^2 t, \cos^2 t)$ $\quad t: 0 \to \frac{\pi}{4}$
$r(0) = (0,1,1)$ och $r(\frac{\pi}{4}) = (1, \frac{1}{2}, \frac{1}{2})$.
$C$ ligger i området där $y > 0$ och $z > 0$.

$$\Rightarrow \int_C F \cdot dr = u(1, \tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{2}) - u(0,1,1) = \frac{1}{1/2} - \frac{0}{1} = \underline{\underline{2}}$$

11. a) Låt $A_R = \{(x,y) : x \ge 0,\ x^2+y^2 \le R^2\}$.
1) Vi söker kritiska punkter innanför halvcirkeln:

$$D_1 f(x,y) = \frac{4 - x^2 + y^2}{(4+x^2+y^2)^2}, \quad D_2 f(x,y) = \frac{-2xy}{(4+x^2+y^2)^2}.$$

Om $y = 0$, $x = \pm 2$ $\qquad x = 0$ ger ingen kr. punkt.

11 (forts.)

$(2,0)$ är den enda kr. punkten i området; $\underline{f(2,0) = \frac{1}{4}}$.

2) På randen: Om $x = 0$, $-R \le y \le R$, $\underline{f(x,y) = 0}$

Om $x^2 + y^2 = R^2$, $x \ge 0$

$f(x,y) = \frac{x}{4+R^2} \iff 0 \le f(x,y) \le \frac{R}{4+R^2}$

Låt $g(t) = \frac{t}{4+t^2} \Rightarrow g'(t) = \frac{4-t^2}{4+t^2}$

| | $0$ | | $2$ | |
|---|---|---|---|---|
| $g'(t)$ | | $+$ | | $-$ |
| $g(t)$ | | $\nearrow$ | | $\searrow$ |

På interv. $[0,\infty)$ är $g(2) = \frac{1}{4}$ g:s största värde.

Eftersom $R > 2$, $g(R) < \frac{1}{4} \Rightarrow \underline{0 \le f(x,y) < \frac{1}{4}}$

Största värdet av $f$ i $A_R$ är $\underline{\underline{\frac{1}{4}}}$ och minsta $\underline{\underline{0}}$

b) $f(x,y) \ge 0$ i hela halvplanet.

$\underline{0}$ är minsta värdet.

Låt $R > 2$. Om $f(p_0) > \frac{1}{4}$ i någon punkt $p_0$, så $p_0 \notin A_R$. Låt $r = \|p_0\|$

Då $p_0 \in A_r$ och $r > R > 2$.

Som i a 2) $0 \le f(x,y) \le \frac{r}{4+r^2}$ i $A_r$.

Men $\frac{r}{4+r^2} < \frac{1}{4}$. Denna motsägelse visar att

$f(p) \le \frac{1}{4}$ för alla $p$. Största värdet är $\frac{1}{4}$.