Grupparbeten omgång 1

Lösningen ska vara inlämnad senast den 4:e februari vid lektionen eller per dator senast den 5:e februari. Markera tydligt gruppnummer och namn (stryk under efternamnen) och personnummer för samtliga medverkande. Om ni väljer att skicka in per dator så ska filnamnet se ut så här(föstås med .doc eller vad ni nu har för filtyp), Grupp1omg1, om ni tillhör grupp 1. För er som går i min lektionsgrupp gäller att filen ska gå att öppna med openoffice eller vara en pdf-fil. Dmitri vill helst ha pdf-filer.

Försök i görligaste mån att lösa uppgifterna inom gruppen men skulle ni köra fast är det tillåtet att be oss lärare om hjälp på traven eller fråga kamrater men det är naturligtvis förbjudet att skriva av någon annan grupps arbete. Det är också viktigt att ni, var och en för sig, kan redogöra för er lösning på ett bra sätt.

Grupparbetet ger maximalt 4 modulpoäng inom den kontinuerliga examinationen men det är också möjligt att få delpoäng, så tveka inte att lämna in dellösningar. I vissa uppgifter finns delar som är *-märkta; de är i första hand tänkta som utmaningar för intresserade elever. De är alltså inte nödvändiga att göra för att få full poäng.

Grupp 1. Låt

$$\mathcal{A} : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^n$$

vara en linjär avbildning. Visa att

$$\dim(\operatorname{im}\mathcal{A}) + \dim(\ker\mathcal{A}) = n,$$

där im står för bilden och ker för rummet av vektorer som avbildas på nollvektorn. *Vad gäller om $\mathcal{A} : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^m$?

Grupp 2. Låt $\mathcal{A}$ vara speglingen i en given linje i planet. Visa att avbildningsskalan för avbildningen är -1.

Grupp 3. Laat P_n vara vektorrummet av alla polynom av grad högst n och låt

$$\mathcal{I} = \int_0^x p(t)dt.$$

Visa att $\mathcal{I}$ är en linjär avbildning från P_3 till P_4. Bestäm dess nollrum, dvs $\{p \in P_3; \mathcal{I}(p) = 0\}$, bild och avbildningsmatris med avseende på baserna $\{1, x, x^2, x^3\}$ resp $\{1, x, x^2, x^3, x^4\}$.

Grupp 4. Två funktioner,f_1, f_2, sägs vara linjärt oberoende om det inte finns någon konstant c så att $f_1(x) = cf_2(x)$ för alla x. Visa att detta är ekvivalent med villkoret att determinanten

$$\begin{vmatrix} f_1(x) & f_2(x) \\ f_1'(x) & f_2'(x) \end{vmatrix} \neq 0.$$

*Kan ni generalisera det här?

Grupp 5. Polynomen $\{1, x, x^2, x^3, x^4\}$ utgör en bas för vektorrummet, P_4, av alla polynom av grad högst fyra. Visa att derivering med avseende på x är en linjär avbildning från, P_4 till P_4 och bestäm dess nollrum, dvs $\{p \in P_4; p' = 0\}$, bild och avbildningsmatris med avseende på den givna basen.

Grupp 6. Givet en linjär avbildning

$$\mathcal{A} : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^m$$

visa att den kan delas upp som $\mathcal{A} = i \circ \mathcal{B} \circ p$, där p är projektionen på komplementet till kärnan, $\{\vec{v}; \mathcal{A}\vec{v} = \vec{0}\}$ (två element i komplementet betraktas som lika om de skiljer sig åt med ett element i kärnan, dvs vi tar kvoten), avbildningen $\mathcal{B}$ är en inverterbar avbildning, från komplementet till kärnan till bilden under $\mathcal{A}$, och i är inklusionen av bilden i $\mathbf{R}^m$.

Grupp 7. Lös ekvationssystemet

$$\begin{cases} y_1' = 5y_1 - 2y_2 \\ y_2' = -2y_1 + 8y_2 \end{cases} .$$

(Ledning: diagonalisera)

Grupp 8. Bestäm den vinkelräta projektionen av punkten $(1, 1, 1)$ på planet $x + y + 2z = 5$ genom att transformera koordninaterna så att planet blir ett av koordinat planen.

Grupp 9. Vi har sett i Amelia 1 kursen att den allmänna lösningen till tex ekvationen

$$y'' - 3y' + 2y = 0$$

är $y = Ae^x + Be^{2x}$. Här är det viktigt att funktionerna e^x och e^{2x} är linjärt oberoende, vilket betyder att

$$c_1 e^x + c_2 e^2 x = 0$$

inte kan gälla med samma, nollskilda, konstanter för godtyckliga x-värden. Visa att funktionerna e^x, e^{2x} och e^{3x} är linjärt oberoende. *Kan ni visa detta mer allmänt?

Grupp 10. Låt $\mathcal{A}$ vara den linjära avbildning som tar vektorer i planet till vektorer i planet, och som ges av spegling i linjen $2x = 3y$. Bestäm avbildningsmatrisen för $\mathcal{A}$ genom att transformera koordinaterna så att det blir fråga om spegling i en av axlarna istället.

Grupp 11. Bestäm avbildningsmatrisen med avseende på standardbasen för den linjära avbildning som ges av rotation i $\mathbf{R}^3$ kring linjen $t(1, 1, 1)$.

Grupp 12. Cayley-Hamiltons sats säger att en matris $\mathbf{A}$ uppfyller den karakteristiska ekvationen. Verifiera detta då matrisen ges av

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & -3 & 3 \end{pmatrix} .$$

Grupp 13. En $n \times m$-matris, $\mathbf{A}$, sägs ha rang, k, om den största kvadriska delmatris med nollskild determinant är av typ $k \times k$. Låt $\mathcal{A}$ vara den linjära avbildningen från $\mathbf{R}^n$ till $\mathbf{R}^m$ som ges av $\mathcal{A}\vec{v} = \mathbf{A}\vec{v}$. Visa att bilden har dimension k, dvs att den spänns upp av k basvektorer.