Grupparbeten omgång 2

Lösningen ska vara inlämnad senast den 25:e februari vid lektionen eller per dator senast den 26:e februari. Markera tydligt gruppnummer och namn (stryk under efternamnen) och personnummer för samtliga medverkande. Om ni väljer att skicka in per dator så ska filnamnet se ut så här(föstås med .doc eller vad ni nu har för filtyp), Grupp1omg1, om ni tillhör grupp 1. För er som går i min lektionsgrupp gäller att filen ska gå att öppna med openoffice eller vara en pdf-fil. Dmitri vill helst ha pdf-filer.

Försök i görligaste mån att lösa uppgifterna inom gruppen men skulle ni köra fast är det tillåtet att be oss lärare om hjälp på traven eller fråga kamrater men det är naturligtvis förbjudet att skriva av någon annan grupps arbete. Det är också viktigt att ni, var och en för sig, kan redogöra för er lösning på ett bra sätt.

Grupparbetet ger maximalt 4 modulpoäng inom den kontinuerliga examinationen men det är också möjligt att få delpoäng, så tveka inte att lämna in dellösningar. I vissa uppgifter finns delar som är *-märkta; de är i första hand tänkta som utmaningar för intresserade elever. De är alltså inte nödvändiga att göra för att få full poäng.

Grupp 1. Visa att bilden av en sammanhängande mängd under en kontinuerlig avbildning blir kontinuerlig.

Grupp 2. Låt $f(x, y, z) = (x^2+y^2+z^2, x^2+y^2-z^2)$, $g(s, t) = (\cos s \cos t, \cos s \sin t, \sin s)$ och sätt $h(s, t) = f \circ g(s, t)$ och $H(x, y, z) = g \circ f(x, y, z)$. Bestäm $J_h(s, t)$ och $J_H(x, y, z)$.

Grupp 3. Visa att bilden av en kompakt mängd under en kontinuerlig avbildning är kompakt.

Grupp 4. Visa att gränsvärdet

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^3 y}{y^2 + x^6}$$

inte existerar.

Grupp 5. Lös differentialekvationen $2\frac{\partial f}{\partial x} + 3\frac{\partial f}{\partial y} = 0$.

Grupp 6. Parametrisera hyperboloiden $x^2 + y^2 - z^2 = 1$ och ge sedan en formel för tangentplanet i termer av parametrarna.

Grupp 7. Finn alla äkta singulära punkter hos dubbla konen $x^2 + y^2 = z^2$.

Grupp 8. Bestäm längden hos den del av kurvan $y = x^2$ som går mellan punkterna $(-1, 1)$ och $(1, 1)$.

Grupp 9. En mängd, M, kallas enkelt sammanhängande om varje sluten kurva i M kan reduceras på ett kontinuerligt sätt till en punkt. Avgör om en torus(badring) resp en sfär är enkelt sammanhängande.

Grupp 10. Formulera och bevisa(formeln i en variabel får användas) motsvarigheten till Leibniz regel för partiella derivator med avseende på x och y.

Grupp 11. Visa att gränsvärdet

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$$

existerar, då

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^3+2x^2y+2xy^2+y^3}{x+y} & \text{om } x+y \neq 0 \\ 0 \quad \text{om } x+y=0 \end{cases} .$$

Grupp 12. Bestäm tangentplanet i punkten $(1, \frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}})$ till enhetssfären centrerad kring punkten $(1,0,0)$.

Grupp 13. Ett infinitesimalt luftpaket med volymen $\Delta V = \Delta x \Delta y \Delta z$ där tryckskillnaden i x-led är Δp_x osv, påverkas av en kraft, $\Delta p_x \Delta y \Delta z$, i x-led. Sammantaget bildar bildar dessa krafter den så kallade tryckgradientkraften. Ge en formel för den kraften och använd detta för att förklara hur luften rör sig om man bortser från andra krafter. Illustrera på en väderkarta där isobarerna är utritade.

Grupp 14. Bestäm tangentplanet i punkten $(1,1,2)$ till paraboloiden $z = x^2 + y^2$.