Grupparbeten omgång 3

Lösningen ska vara inlämnad senast den 17:e mars vid lektionen eller per dator senast den 18:e mars. Markera tydligt gruppnummer och namn (stryk under efternamnen) och personnummer för samtliga medverkande. Om ni väljer att skicka in per dator så ska filnamnet se ut så här(förstås med .doc eller vad ni nu har för filtyp), Grupp1omg1, om ni tillhör grupp 1. För er som går i min lektionsgrupp gäller att filen ska gå att öppna med openoffice eller vara en pdf-fil. Dmitri vill helst ha pdf-filer.

Försök i görligaste mån att lösa uppgifterna inom gruppen men skulle ni köra fast är det tillåtet att be oss lärare om hjälp på traven eller fråga kamrater men det är naturligtvis förbjudet att skriva av någon annan grupps arbete. Det är också viktigt att ni, var och en för sig, kan redogöra för er lösning på ett bra sätt.

Grupparbetet ger maximalt 4 modulpoäng inom den kontinuerliga examinationen men det är också möjligt att få delpoäng, så tveka inte att lämna in dellösningar. I vissa uppgifter finns delar som är *-märkta; de är i första hand tänkta som utmaningar för intresserade elever. De är alltså inte nödvändiga att göra för att få full poäng.

Grupp 1. Den allmänna gaslagen säger att trycket p, volymen V och den absoluta temperaturen för en ideal gas förhåller sig som $pV = NRT$ där $R \approx 8,3143$ är den allmänna gaskonstanten och N mängden gas mätt i mol. Bestäm det val av konstanter V och N som bäst passar till mätvärdena

p	T
756,8	0,2
757,3	0,1
757,8	−0,5
758,3	−1,0
758,7	−1,5
759,2	−2,3
760,4	−2,3
761,6	−2,8
762,9	−2,6
764,1	−2,5

*Vem var Boltzmann?

Grupp 2. Bestäm alla lokala extrempunkter till funktionen

$$f(x, y, z) = x^2 - xy + y^2 + 4z^4$$

och avgör deras karaktärer. Bestäm också största och minsta värdet för funktionen på enhetsklotet: $x^2 + y^2 + z^2 \leq 1$.

Grupp 3. En laddning som rör sig med hastigheten $\vec{v}$ ger upphov till ett elektriskt fält $\vec{E}$ och ett magnetiskt fält $\vec{B}$, relaterade enligt formeln

$$\vec{B} = \frac{1}{c^2}\vec{v} \times \vec{E}.$$

När kan $\vec{E}$ lösas ut som funktion av $\vec{B}$ och $\vec{v}$? * Vem var Oersted?

Grupp 4. PT) Bestäm andra ordningens Taylorutveckling till funktionen

$$\vec{r}(u, v) = (\cos u \cos v, \cos u \sin v, \sin u)$$

i punkten $(1, 0, 0)$.

MAJ) En funktion av typ $\mathbf{R} \to \mathbf{R}^2$ kan Taylorutvecklas komponentvis. Låt $\vec{r}(t) = (\cos t, \sin t)$ och $f(x, y) = e^{xy}$. Använd kedjeregeln för att MacLaurinutveckla funktionen $h(t) = f(\vec{r}(t))$.

Grupp 5. Använd Taylorutvecklingar för att avgöra om gränsvärdet

$$\lim_{(x,y,z)\to(1,-1,1)} \frac{\sin(xy + z^2)\cos(xz - y^2)}{(x-1)^2 + (y+1)^2 + (z-1)^2}$$

existerar.

Grupp 6. Betrakta parameterytan

$$\vec{r}(u, v) = (\cos u, (\sin u + 2)\cos v, (\sin u + 2)\sin v).$$

Visa att höjden z kan lösas ut som en funktion av u och v i en omgivning av punkten $(x, y, z) = (0, 0, -1)$. Bestäm även $\frac{\partial z}{\partial u}$ och $\frac{\partial z}{\partial v}$ i punkten.

Grupp 7. Visa att ekvationssystemet

$$\begin{cases} e^x \cos y + e^z \sin u = 1 \\ e^y \sin z - e^u \cos x = -1 \\ e^z \sin u + e^x \sin y = 0 \\ e^u \cos x - e^y \cos z = 0 \end{cases}$$

bara har en lösning i en omgivning av $(0, 0, 0, 0)$.

Grupp 8. Om $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ är de tre rötterna till tredjegradsekvationen $x^3 + ax^2 + bx + c = 0$ så uppfyller koefficienterna relationerna

$$\begin{cases} a = \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 \\ b = \alpha_1\alpha_2 + \alpha_1\alpha_3 + \alpha_2\alpha_3 \\ c = \alpha_1\alpha_2\alpha_3 \end{cases} .$$

Visa att om vi låter koefficienterna variera så blir rötterna differentierbara funktioner av koefficienterna utom i de fall då rötterna sammanfaller.

Grupp 9. Låt $f(r, \phi, t) = (r \sinh t \cos \phi, r \sinh t \sin \phi, r \cosh t)$. Kring vilka punkter har den en differentierbar invers?

Grupp 10. Betrakta ekvationssystemet

$$T : \begin{cases} 2x + 3y - z + u + 2v = 5 \\ 4x - y + 3z - 2u + v = 2 \\ 3x + 2y - 2z + u - v = 3 \end{cases}$$

och visa att det går att lösa med z och v som parametrar. Förklara hur det hänger ihop med implicita funktionssatsen.

Grupp 11. Visa att den triangel med hörnen på enhetscirkeln som har störst area är den liksidiga.

Grupp 12. Bestäm andra ordningens Taylorutveckling kring punkten $(1, -1)$ för funktionen $z = z(x, y)$ definierad implicit av ekvationen $xz^3 + 2xyz + y^2 = 5$ i en omgivning av punkten $(1, -1, 2)$.

Grupp 13. Låt $f(x, y, z) = xy + z^2$. Finn största och minsta värdet som f antar på skärningen mellan hyperboloiden $x^2 + y^2 - z^2 = 1$ och paraboloiden $z = x^2 + y^2$.

Grupp 14. När en elektrisk ström, I, möter tre parallellkopplade motstånd, R_1, R_2, R_3, delar den sig i tre strömmar, I_1, I_2, I_3, så att effekten

$$R_1 I_1^2 + R_2 I_2^2 + R_3 I_3^2$$

minimeras. Uttryck I_1, I_2 och I_3 i termer av R_1, R_2, R_3 och I.