Grupparbeten omgång 4

Lösningen ska vara inlämnad senast den 28:e april vid lektionen eller per dator senast den 29:e april. Markera tydligt gruppnummer och namn (stryk under efternamnen) och personnummer för samtliga medverkande. Om ni väljer att skicka in per dator så ska filnamnet se ut så här(förstås med .doc eller vad ni nu har för filtyp), Grupp1omg4, om ni tillhör grupp 1. För er som går i min lektionsgrupp gäller att filen ska gå att öppna med openoffice eller vara en pdf-fil. Dmitri vill helst ha pdf-filer.

Försök i görligaste mån att lösa uppgifterna inom gruppen men skulle ni köra fast är det tillåtet att be oss lärare om hjälp på traven eller fråga kamrater men det är naturligtvis förbjudet att skriva av någon annan grupps arbete. Det är också viktigt att ni, var och en för sig, kan redogöra för er lösning på ett bra sätt.

Grupparbetet ger maximalt 4 modulpoäng inom den kontinuerliga examinationen men det är också möjligt att få delpoäng, så tveka inte att lämna in dellösningar. I vissa uppgifter finns delar som är *-märkta; de är i första hand tänkta som utmaningar för intresserade elever. De är alltså inte nödvändiga att göra för att få full poäng.

Grupp 1. Beräkna integralen

$$\int_{\mathbf{R}^2} e^{-p(x,y)}dxdy,$$

då p är en positivt definit kvadratisk form.
*Vad händer om p istället är positivt semidefinit?

Grupp 2. En torus är en matematisk badring, eller för att uttrycka sig mer matematiskt, den yta som genereras av att en liten cirkel färdas längs en större cirkel. Bestäm arean hos torusen som ges av en liten cirkel med radie 1 som rör sig i en stor cirkel med radie 4.

Grupp 3. En *central kraft* är en som bara beror av avståndet till kraftkällan och är riktad rakt ut eller in mot den. Visa att en sådan kraft är konservativ.
*ge exempel på sådana krafter.

Grupp 4. PT) Låt f vara en komplexvärd funktion, dvs $f(x, y) = u(x, y) + iv(x, y)$ där u och v är funktioner från $\mathbf{R}^2$ till $\mathbf{R}$, som uppfyller, de så kallade Cauchy-Riemann ekvationerna

$$\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} = 0$$

i ett enkelt sammanhängande område Ω. Visa att integralen

$$\int_\Gamma f(z)dz = \int_\Gamma (u(x, y) + iv(x, y))(dx + idy),$$

där Γ är en kurva i Ω, inte beror av vägen Γ utan bara av slutpunkterna.
*Ge exempel på en funktion, $f(z)$, som uppfyller Cauchy-Riemann ekvationerna.

MAJ) Låt

$$\vec{F}(x,y) = \left(\frac{x}{x^2+(y-1)^2}, \frac{1-y}{x^2+(y-1)^2} \right)$$

och beräkna

$$\oint_\Gamma \vec{F}(\vec{r}) \cdot d\vec{r},$$

där Γ är enhetscirkeln centrerad i punkten $(0,1)$.

Grupp 5. Använd tekniken som presenteras i avsnitt 9.8.2 i boken för att beräkna arean hos enhetssfären.

Grupp 6. Bestäm arean hos den del av hyperboloiden $x^2+y^2-z^2=1$ som ligger inom den sfär som har radie 2 och är centrerad i origo.

Grupp 7. Bestäm volymen hos den del av ellipsoiden

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$$

där $0 \le y \le x$.
(Ledning: använd en variant av sfäriska koordinater.)

Grupp 8. Finn tyngdpunkten hos tetraedern begränsad av koordinatplanen och planet $x+y+z=1$. (densiteten antas vara konstant)

Grupp 9. Visa att fältet $\vec{F}(\vec{r}) = \left(\frac{x}{x^2+y^2}, \frac{y}{x^2+y^2} \right)$ är konservativt. Bestäm även potentialen.

Grupp 10. Bestäm arean hos orådet $\Omega = \{(x,y); 1 \le x^2+y^2 \le 2\}$ genom att räkna dubbelintegralen

$$\iint_\Omega dxdy.$$

Grupp 11. Visa formeln för volymen hos en rotationskropp, se AM1 8.5.2.

Grupp 12. Visa formeln för en rotationsarea, se AM1 8.6.

Grupp 13. En laddning, q, i vila, ger upphov till ett elektriskt fält: $\vec{E} = C\frac{q}{r^2}\vec{r}$, där C är en konstant, r är avståndet till laddningen och $\vec{r}$ är radiell riktning sett från laddningen. Om vi har två laddningar med fält $\vec{E}_1$ respektive $\vec{E}_2$ så blir det sammantagna fältet $\vec{E} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2$. Hur ser fältet ut om vi har två laddningar placerade i position $(-1,0)$ respektive $(1,0)$[vi antar att vi är i planet för enkelhetsskull] som bägge är positiva och lika stora? har olika tecken men annars lika? Är fälten konservativa?

Grupp 14. En kloss med massan m som glider ned för ett lutande plan utsätts dels för den nedåtriktade gravitationskraften med belopp mg och dels för en friktionskraft $\vec{F}$. Vi antar att klossen rör sig med konstant hastighet, dvs att krafterna tar ut varandra. Bestäm arbetet för friktionen då klossen färdas från höjd h_1 ned till höjd h_2.

* Är kraften konservativ?