Grupparbeten omgång 5

Lösningen ska vara inlämnad senast den 19:e maj vid lektionen eller per dator senast den 20:e maj. Markera tydligt gruppnummer och namn (stryk under efternamnen) och personnummer för samtliga medverkande. Om ni väljer att skicka in per dator så ska filnamnet se ut så här(förstås med .doc eller vad ni nu har för filtyp), Grupp1omg4, om ni tillhör grupp 1. För er som går i min lektionsgrupp gäller att filen ska gå att öppna med openoffice eller vara en pdf-fil. Dmitri vill helst ha pdf-filer.

Försök i görligaste mån att lösa uppgifterna inom gruppen men skulle ni köra fast är det tillåtet att be oss lärare om hjälp på traven eller fråga kamrater men det är naturligtvis förbjudet att skriva av någon annan grupps arbete. Det är också viktigt att ni, var och en för sig, kan redogöra för er lösning på ett bra sätt.

Grupparbetet ger maximalt 4 modulpoäng inom den kontinuerliga examinationen men det är också möjligt att få delpoäng, så tveka inte att lämna in dellösningar. I vissa uppgifter finns delar som är *-märkta; de är i första hand tänkta som utmaningar för intresserade elever. De är alltså inte nödvändiga att göra för att få full poäng.

Grupp 1. Tänk er en cylinder. Om vi väljer samma riktning på ändcirklarna och klistrar ihop cylindern så att riktningarna överensstämmer får vi en torus. Om vi istället väljer motsatt riktning och klistrar ihop ändarna på samma sätt får vi en yta som brukar kallas Kleins flaska. Avgör om torusen respektive Kleins flaska är orienterbara.

Grupp 2. a) En elektrisk laddning q ger upphov till ett elektriskt fält $\vec{E} = C\frac{q}{r^2}\hat{r}$. Bestäm dess potential.

b) Bestäm det elektriska fältet genererat av en homogent laddad sfär.

Grupp 3. Visa följande varianter av partiell integration för Greens formel

$$\iint_K f\left(\frac{\partial \phi_2}{\partial x} - \frac{\partial \phi_1}{\partial y}\right) dxdy = \oint_{\partial K} f(\phi_1\, dx + \phi_2\, dy) - \iint_K \left(\frac{\partial f}{\partial x}\phi_2 - \frac{\partial f}{\partial x}\phi_1\right) dxdy,$$

respektive Gauss sats

$$\iiint_K f \operatorname{div}\vec{\phi}\, dxdydz = \iint_{\partial K} f(\phi_1\, dy\wedge dz + \phi_2\, dz\wedge dx + \phi_3\, dx\wedge dy) - \iiint_K \operatorname{grad} f\cdot\vec{\phi}\, dxdydz.$$

Grupp 4. PT) Beräkna

$$\iint_\Sigma \operatorname{rot}\vec{F}\cdot\hat{n}d\sigma,$$

då Σ är den del av sfären $x^2 + y^2 + (z-2)^2 = 8$ som ligger ovanför xy-planet och fältet är $\vec{F} = (y^2, x^3, z)$.

MAJ) Beräkna

$$\oint_\Gamma \vec{F} \cdot d\vec{r},$$

då $\vec{F} = (y^2, -x^2, z^2)$ och Γ är skärningen mellan planet $x+y+z=2$ och cylindern $x^2+y^2=1$ genom att använda Stokes sats(sats 11.4).

Grupp 5. Bestäm x_0 så att

$$\int_\Gamma x\,ds = x_0 \int_\Gamma ds$$

då Γ är kurvan $(\cos u, \sin u, u)$, där u går från 0 till 2π.

Grupp 6. Den allmänna versionen av Stokes sats säger att om K är en $p+1$-dimensionell orienterad "yta" i $\mathbf{R}^n$ och ∂K dess orienterade rand så gäller

$$\int_K d\phi = \int_{\partial K} \phi$$

där

$$\phi = \frac{1}{p!} \sum_{i_1,\ldots,i_p=1}^{n} \phi_{i_1,\ldots,i_p} dx_{i_1} \wedge \ldots \wedge dx_{i_p}$$

och

$$d\phi = \frac{1}{p!} \sum_{i,i_1,\ldots,i_p=1}^{n} \frac{\partial \phi_{i_1,\ldots,i_p}}{\partial x_i} dx_i \wedge dx_{i_1} \wedge \ldots \wedge dx_{i_p}.$$

Identifiera specialfallen $p=1, n=2$: Greens formel, $p=2, n=3$: Gauss sats, $p=1, n=3$: Stokes sats(11.4) och $p=0$: Integralkalkylens fundamentalsats.

Grupp 7. Använd Arkimedes princip(se Ex 11.6 i boken) för att bestämma hur djupt en sfär med massan M, homogent fördelad, och radie 1 meter, sjunker.

Grupp 8. I exempel 11.28 beräknas tröghetsmomentet med avseende på z-axeln. Beräkna övriga tröghetsmoment

$$\iint_S (x^2+y^2)\mu\,d\sigma \qquad \iint_S (y^2+z^2)\mu\,d\sigma$$

och tröghetsprodukterna

$$\iint_S xy\mu\,d\sigma, \quad \iint_S xz\mu\,d\sigma, \quad \iint_S yz\mu\,d\sigma.$$

Grupp 9. Använd Gauss sats för att bestämma volymen hos en kon med basområde Ω, med lämplig regularitet, och höjd h.

Grupp 10. Visa att fältet

$$\vec{F}(x,y,z) = \left(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}, \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}, \frac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} \right)$$

är konservativt.

Grupp 11. a) Beräkna rotationen hos hastighetsfältet $\vec{v} = r\omega\hat{\theta}$ hos en virvel som rör sig med konstant vinkelhastighet ω runt z-axeln.

b) Samma uppgift för hastighetsfältet $\vec{v} = r\omega\hat{\theta} - \frac{1}{r^2}\hat{r}$.

(beteckningarna är i cylinderkoordinater)

Grupp 12. Vilka av följande områden är enkelt sammanhängande? (Motivera!!)

a) $\{(x,y,z); x > 0 \text{ om } yz = 0\}$

b) $\{(x,y,z); x > 0 \text{ om } yz = 0 \text{ och } z < 0 \text{ om } xy = 0\}$

c) $\{(x,y,z); yz \neq 0\}$

d) $\{(x,y,z); (x,y,z) \neq (0,0,0), (x,y,z) \neq (1,0,0), (x,y,z) \neq (0,1,0)$ och $(x,y,z) \neq (0,0,1)\}$

e) $\mathbf{R}^3 \setminus A \cup B \cup C \cup D \cup E \cup F$ där A, B, C, D, E, F är linjestyckena $A = (t,0,0)$, $B = (0,t,0)$, $C = (0,0,t)$, $D = (t,0,1-t)$, $E = (0,t,1-t)$ och $F = (t,1-t,0)$ för $0 \leq t \leq 1$.

Grupp 13. I vacuum blir Maxwells ekvationer för det elektriska fältet $\vec{E}$ och det magnetiska fältet $\vec{B}$

$$\begin{cases} \operatorname{div} \vec{E} = 0 \\ \operatorname{div} \vec{B} = 0 \\ \operatorname{rot} \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \\ \operatorname{rot} \vec{B} = c^2 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \end{cases} .$$

Antag att $\vec{E} = (0, E(t), 0)$ och $\vec{B} = (0,0,B(t))$ och lös ekvationssystemet.

Grupp 14. Låt $\vec{F}(\vec{r}) = \vec{r}$ då är det lätt att se genom direkta räkningar att $\operatorname{div} \vec{F}(\vec{r}) = 3$. Visa detta istället med hjälp av sats 11.3.