Institutionen för matematik
KTH

MODELLTENTAMEN

Tentamensskrivning, år–månad–dag, kl. x.00–(x + 5).00.

5B1133, Analytiska metoder och linjär algebra 2.

Uppgifterna 1–5 svarar mot varsitt moment i den kontinuerliga examinationen. Av dessa uppgifter skall man bara lösa dem som svarar mot moment man inte blivit godkänd på under kursens gång. Bedömning här är Godkänd/Underkänd.

Uppgifterna 6–10 poängsätts med maximalt 4 poäng per uppgift. Betygsgränser:
För betyg 3 krävs godkänt på moment 1–5 plus 3 poäng totalt på uppgifterna 6–10.
För betyg 4 krävs godkänt på moment 1–5 plus 7 poäng totalt på uppgifterna 6–10.
För betyg 5 krävs godkänt på moment 1–5 plus 12 poäng totalt på uppgifterna 6–10.

Samtliga behandlade uppgifter skall förses med utförliga lösningar och motiveringar. Inga hjälpmedel är tillåtna. Skriv program och grupp tydligt på omslaget.

1. För vilka värden på konstanterna a och b är de tre vektorerna (a,b,b), (b,a,b) och (b,b,a) linjärt beroende.

2. Beräkna riktningsderivatan av funktionen $f(x,y) = e^{x-y}$ i punkten (0, 0) i den riktning som ges av vektorn $\boldsymbol{v} = (1, 1)$. Hur stor (maximalt) kan riktningsderivatan av f i origo bli?

3. Bestäm största och minsta värdet av $f(x,y) = 2x^3 - xy^2$ i området $x^2 + y^2 \leq 9$.

4. Beräkna linjeintegralen $\int_\Gamma \boldsymbol{F} \cdot d\boldsymbol{r}$, där $\boldsymbol{F} = \left(-y \arctan\frac{y}{x}, x \arctan\frac{y}{x} \right)$ och Γ är randen till området $x^2 + y^2 \leq 1,\ 0 \leq y \leq x$ genomlöpt ett varv i positiv riktning.

5. Beräkna flödet av vektorfältet $\boldsymbol{F} = (y, -x, z)$ upp genom paraboloidytan $z = 4 - x^2 - y^2,\ z \geq 0$.

6. Beräkna dubbelintegralen $\iint_{\mathbf{D}} y \, dx dy$, där $\mathbf{D}$ är området mellan kurvorna $y = \sqrt{1-x},\ y = \sqrt{1+x}$ och linjen $y = 0$.

7. a. Visa att vektorfältet $\boldsymbol{F} = (y^2 + 2xz, z^2 + 2xy, x^2 + 2yz)$ har en potential.
   b. Bestäm den potential till $\boldsymbol{F}$ som har värdet 2 i punkten (0,0,0).
   c. Beräkna linjeintegralen $\int_\Gamma \boldsymbol{F} \cdot d\boldsymbol{r}$, där Γ är kurvan $x = t - t^2,\ y = t^3,\ z = t^4$ då t går från 0 till 1.

8. Kanten till ett ovalt bord beskrivs av kurvan $x^2 + y^6 = 1$, där x och y anges i meter. Hur bred är den smalaste korridor i vilken bordet kan vridas 180 grader?

9. Anta att den differentierbara funktionen $f(x,y)$ uppfyller $y f'_x - x f'_y = 0$. Visa att varje cirkeln med centrum i origo är en nivåkurva till f.

V.g.vänd

10. Vi identifierar $\mathbf{R}^2$ med de komplexa talen, dvs ett komplext tal $z = a + bi$ identifieras med vektorn (a,b). För ett givet komplext tal w betraktar vi den linjära avbildningen $T_w : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$ som skickar ett komplext tal z till talet $T_w(z) = z \cdot w$; den vanliga komplexa multiplikationen. Vilka komplexa tal w på enhetscirkeln $|w| = 1$ har den egenskap att matrisen för T_w har egenvektorer?

1. De givna vektorerna är linjärt beroende precis då determinanten av nedanstående matris är lika med noll.

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} a & b & b \\ b & a & b \\ b & b & a \end{bmatrix}$$

Uträknad blir determinantens värde $(a + 2b)(a - b)^2$. Så vi får

Svar: $a = b$ eller $a = -2b$.

2. Vi har $f'_{\boldsymbol{v}}(0,0) = \operatorname{grad} f(0,0) \cdot \dfrac{\boldsymbol{v}}{|\boldsymbol{v}|}$. Man får

$$\operatorname{grad} f(0,0) = (f'_x, f'_y)_{(0,0)} = (e^{x-y}, -e^{x-y})_{(0,0)} = (1, -1) \text{ och}$$
$$\frac{\boldsymbol{v}}{|\boldsymbol{v}|} = \frac{1}{\sqrt{2}}(1,1),$$

vilket ger $f'_{\boldsymbol{v}}(0,0) = (1,-1) \cdot \dfrac{1}{\sqrt{2}}(1,1) = 0$.

Riktningsderivatan $f'_u(0,0)$ är maximal då $\boldsymbol{u}$ har riktning av $\operatorname{grad} f(0,0)$. Maximala värdet blir $\operatorname{grad} f(0,0) \cdot \dfrac{\boldsymbol{u}}{|\boldsymbol{u}|} = (1,-1) \cdot \dfrac{1}{\sqrt{2}}(1,-1) = \sqrt{2}$.

Svar: 0 resp $\sqrt{2}$.

3. Eftersom funktionen $f(x,y) = 2x^3 - xy^2$ är kontinuerlig och den tillåtna mängden $x^2 + y^2 \le 9$ är sluten och begränsad så antar f både ett största och ett minsta värde i mängden. Detta sker antingen i en inre kritisk punkt eller i en kritisk punkt på randen. (Några singulära punkter finns inte.)
Inre punkter: Dessa fås ur ekvsystemet $f'_x = 6x^2 - y^2 = 0$, $f'_y = -2xy = 0$. Vi får punkten $(0,0)$.
Randen: $x^2 + y^2 = 9 \Leftrightarrow y^2 = 9 - x^2$. Man har $f(x,y) = 2x^3 - x(9 - x^2) = 3x^3 - 9x = h(x)$, där $|x| \le 3$. Ur ekv $h'(x) = 9x^2 - 9 = 0$ får vi $x = \pm 1$ svarande mot punkterna $(1,\pm\sqrt{8})$, $(-1,\pm\sqrt{8})$. Mot ändpunkterna $x = \pm 3$ på intervallet $|x| \le 3$ svarar punkterna $(\pm 3,0)$.
Sammanfattning: Aktuella punkter är $(0,0)$, $(1,\pm\sqrt{8})$, $(-1,\pm\sqrt{8})$ och $(\pm 3,0)$. I dessa punkter antar f värdena $0, -6, 6, 54$ och -54 alltså

Svar: Största värdet = 54, minsta värdet = –54.

4. Beteckna området med $\mathbf{D}$ och fältets komponenter med $P(x,y)$ och $Q(x,y)$. Vi använder Greens sats och får

$$\int_\Gamma \boldsymbol{F} \cdot d\boldsymbol{r} = \iint_{\mathbf{D}} \left(\arctan\frac{y}{x} + \frac{x}{1 + y^2/x^2} \cdot \frac{-y}{x^2} + \arctan\frac{y}{x} + \frac{y}{1 + y^2/x^2} \cdot \frac{1}{x^2} \right) dx\,dy =$$
$$= 2 \iint_{\mathbf{D}} \arctan\frac{y}{x}\, dx\,dy = \{ \text{ polära koordinater } \} = 2 \int_0^{\pi/4} dv \int_0^1 rv\, dr =$$
$$= 2 \left[\frac{r^2}{2}\right]_0^1 \cdot \left[\frac{v^2}{2}\right]_0^{\pi/4} = \frac{\pi^2}{32}.$$

Svar: $\dfrac{\pi^2}{32}$.

5. Flödet ges av $\iint\limits_{\mathbf{S}} \boldsymbol{F} \cdot \hat{\boldsymbol{n}}\, dS$, där $\boldsymbol{F} = (y, -x, z)$ och $\mathbf{S}$ är den del av ytan paraboloidytan $z = 4 - x^2 - y^2$ som ligger ovanför xy–planet. Vi får

$$\hat{\boldsymbol{n}}\, dS = (-z'_x, -z'_y, 1)\, dx\, dy = (2x, 2y, 1)\, dxdy.$$

Projektionen $\mathbf{D}$ av $\mathbf{S}$ på xy–planet är cirkelskivan $x^2 + y^2 \leq 4$.

$$\iint\limits_{\mathbf{S}} \boldsymbol{F} \cdot \hat{\boldsymbol{n}}\, dS = \iint\limits_{\mathbf{D}} (y, -x, 4 - x^2 - y^2) \cdot (2x, 2y, 1)\, dxdy = \iint\limits_{\mathbf{D}} (4 - x^2 - y^2) dxdy =$$

$$= \{ \text{ polära koordinater } \} = \int_0^{2\pi} dv \int_0^2 (4 - r^2) r\, dr = 2\pi \left[2r^2 - \frac{r^4}{4} \right]_0^2 = 8\pi.$$

Svar: 8π.

---

6. Vi har

$$y = \sqrt{1 - x} \;\Leftrightarrow\; x = 1 - y^2,\; y \geq 0$$

$$y = \sqrt{1 + x} \;\Leftrightarrow\; x = y^2 - 1,\; y \geq 0.$$

Dessa kurvor skär varandra då

$$1 - y^2 = y^2 - 1 \;\Leftrightarrow\; y^2 = 1 \;\Leftrightarrow\; y = 1 \text{ (eftersom } y \geq 0).$$

Detta innebär att $\mathbf{D}$ ges av $y^2 - 1 \leq x \leq 1 - y^2$, $0 \leq y \leq 1$ och vi får

$$\iint\limits_{\mathbf{D}} y\, dxdy = \int_{y=0}^{y=1} dy \int_{x=y^2-1}^{x=1-y^2} y\, dx = \int_{y=0}^{y=1} y \big[x\big]_{x=y^2-1}^{x=1-y^2} dy = \int_0^1 2y(1 - y^2)\, dy =$$

$$= 2 \int_0^1 (y - y^3)\, dy = 2 \left[\frac{y^2}{2} - \frac{y^4}{4} \right]_0^1 = \frac{1}{2}.$$

Svar: $\frac{1}{2}$.

---

7. a. Funktionen $\boldsymbol{F} = (y^2 + 2xz, z^2 + 2xy, x^2 + 2yz)$ är kontinuerligt deriverbar i hela $\mathbf{R}^3$ som är ett enkelt sammanhängande område och rotationen $\operatorname{rot} \boldsymbol{F} = (2z - 2z, -2x + 2x, 2y - 2y) = (0,0,0) \;\Rightarrow\; \boldsymbol{F}$ har en potential U.

b. Eftersom U är en potential till $\boldsymbol{F}$ så är $\operatorname{grad} U = \boldsymbol{F}$, dvs $(U'_x, U'_y, U'_z) = (y^2 + 2xz, z^2 + 2xy, x^2 + 2yz)$ och vi får:

$$U'_x = y^2 + 2xz \;\Rightarrow\; U = xy^2 + x^2 z + C(y,z).$$

$$U'_y = z^2 + 2xy \text{ och } U'_y = 2xy + C'_y \;\Rightarrow\; z^2 + 2xy = 2xy + C'_y \;\Rightarrow$$

$$C'_y = z^2 \;\Rightarrow\; C(y,z) = yz^2 + D(z) \;\Rightarrow$$

$$U = xy^2 + x^2 z + yz^2 + D(z).$$

$$U'_z = x^2 + 2yz \text{ och } U'_z = x^2 + 2yz + D' \;\Rightarrow\; x^2 + 2yz = x^2 + 2yz + D' \;\Rightarrow$$

$$D' = 0 \;\Rightarrow\; D = \text{konstant} \;\Rightarrow$$

$$U = xy^2 + x^2 z + yz^2 + D$$

och $U(0,0,0) = 2$ ger $D = 2$.

Svar: $xy^2 + x^2 z + yz^2 + 2$.

c. $t = 0$ och $t = 1$ ger $(0,0,0)$ och $(0,1,1)$ $\Rightarrow \int\limits_{\Gamma} \boldsymbol{F} \cdot d\boldsymbol{r} = U(0,1,1) - U(0,0,0) = 1.$

Svar: 1.

---

8. Vi maximerar $f(x,y) = x^2 + y^2$ då $g(x,y) = x^2 + y^6 - 1$. Enligt Lagrange skall grad f och grad g vara parallella, dvs $(2x, 2y) = t(2x, 6y^5)$. Vi kan utesluta $t = 0$, varav $y = 3y^5$, med lösningarna $y = 0$ och $y^2 = 1/\sqrt{3}$. Detta ger $x^2 = 1$ resp $x^2 = 1 - \sqrt{3}/9$ och sålunda $f = 1$ resp $f = 1 - \sqrt{3}/9 + \sqrt{3}/3 = 1 + 2\sqrt{3}/9$ som är det största värdet. Korridorens minsta bredd blir två gånger roten ur detta värde.

Svar: $\dfrac{2\sqrt{9 + 2\sqrt{3}}}{3}$.

---

9. Varje cirkeln med centrum i origo och radien r kan parametriseras genom $x = r \cos t$, $y = r \sin t$, där $0 \le t < 2\pi$. Vi skall visa att $h(t) = f(r \cos t, r \sin t)$ är en konstant funktion, dvs att derivatan $h'(t) = 0$ för alla $0 \le t < 2\pi$. Derivering med avseende på t ger, enligt kedjeregeln,

$$h'(t) = \frac{d}{dt} f(r \cos t, r \sin t) = f'_x \cdot x'_t + f'_y \cdot y'_t = f'_x \cdot (-r \sin t) + f'_y \cdot r \cos t =$$

$$= -y f'_x + x f'_y = 0$$

enligt förutsättningen. Saken är klar!

---

10. Ett komplext tal w på enhetscirkeln kan skrivas på formen $w = \cos \alpha + i \sin \alpha$ där $\alpha = \arg w$. Multiplikation med ett sådant tal innebär rotation med vinkeln α. En vektor övergår vid en rotation på en parallell vektor om och endast om α är en heltalsmultipel av π. Detta innebär att endast talen $w = 1$ och $w = -1$ har den undersökta egenskapen.

Svar: $w = 1$ och $w = -1$.
