Institutionen för matematik
KTH

Tentamensskrivning, 2004–05–28, kl. 14^{00}–19^{00}.

5B1141 Analytiska metoder och linjär algebra II, för IT.

De fem första uppgifterna svarar mot de fem momenten i den kontinuerliga examinationen och bedöms med godkänt eller underkänt.(Ni ska förstås bara göra de uppgifter som svarar mot moment ni inte redan har blivit godkända på. Titta på bonuslistan om ni är osäkra.) Uppgifterna 6-10 kan ge maximalt 4 poäng var.
Förutom godkänt på de fem första uppgifterna krävs dessutom
-för betyg 3 minst 3 poäng totalt på uppgifterna 6-10,
-för betyg 4 minst 7 poäng totalt på uppgifterna 6-10,
-för betyg 5 minst 12 poäng totalt på uppgifterna 6-10.
Inga hjälpmedel! Skrivningsåterlämning tisdagen den 1:a juni, kl 10, vid ingången till Forumhuset.

1. Bestäm avbildningsmatrisen, med avseende på standardbasen i planet, för den linjära avbildning som svarar mot att spegla i linjen $y = 2x$.

2. Bestäm tangentplanet i punkten $(x, y) = (1, -1)$ till ytan given som en graf $z = x^3 + 2x^2 - y^4$.

3. Bestäm $z'_x(0, 1)$ då z är den funktion som är implicit given i en omgivning av punkten $(0, 1, -1)$ av sambandet $xz - z^3y + y^2 = 2$.

4. Beräkna dubbelintegralen
$$\iint_\Omega y^2\, dxdy$$
då Ω är området begränsat av linjerna $y = 1$, $y = -1$, $x + y = 2$ och $x + y = -2$.

5. Beräkna
$$\iint_\Sigma \vec{F}(\vec{r}) \cdot \hat{n}(\vec{r})\, d\sigma$$
där $\vec{F}(x, y, z) = (x, y, z)$, Σ är ytan given av parametriseringen $\vec{r}(u, v) = (u, v, 1-u-v)$, $0 \le u$, $0 \le v$ och $u + v \le 1$, och $\hat{n}$ är enhetsnormalen med positiv z-komponent.

6. Ellipsoiden $x^2 + 2y^2 + (z-1)^2 = 4$ skär xy-planet i en ellips. Bestäm arean som ellipsen innesluter. (4p)

7. Låt f vara en funktion av typ $\mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$ som är definierad i en omgivning av punkten $(1, 0)$ och har kontinuerliga derivator av 3:e ordningen i den omgivningen. Antag att funktionens Taylorutveckling i punkten är
$$f(x, y) = 3 + 2(x-1)^2 - 2(x-1)y + y^2 + O((\sqrt{(x-1)^2 + y^2})^3).$$

V.g. vänd!

a) Visa att punkten $(1, 0)$ är en stationär(med andra ord kritisk) punkt för f. (1p)

b) Bestäm karaktären hos den stationära punkten. (3p)

8. Betrakta differentialekvationen

$$5\frac{\partial f}{\partial x} - 2\frac{\partial f}{\partial y} = 0. \tag{1}$$

Visa att

a) funktioner på formen $f(x, y) = g(2x + 5y)$, där g är en godtycklig deriverbar funktion från $\mathbf{R}$ till $\mathbf{R}$, är lösningar till (1). (1p)

b) alla differentierbara lösningar till ekvationen (1) är på formen $f(x, y) = g(2x+5y)$ för någon deriverbar funktion g av en variabel. (3p)

9. Låt $\vec{F}(x, y, z) = (-y, x, xy)$ och låt Σ vara övre halvsfären, med enhetsnormalfält $\hat{n}$ pekande utåt sett från sfärens centrum. Det finns då en sats(Stokes sats) som i det här speciella fallet säger att

$$\iint_{\Sigma} (\mathrm{rot}(\vec{F}(\vec{r})) \cdot \hat{n}(\vec{r})\, d\sigma = \oint_S \vec{F}(\vec{r}) \cdot d\vec{r} \tag{2}$$

där S är enhetscirkeln i xy-planet(vilket också är randen till ytan Σ) och linjeintegralen tas i positiv riktning sett uppifrån.
Visa att (2) gäller genom att beräkna integralerna var för sig och se att man får samma svar. (4p)

10. Ekvationen $2x^2 + 5y^2 - 2yz + 5z^2 = 12$ definierar en ellipsoid centrerad i origo. Bestäm huvudaxlarnas riktningar och halvaxlarnas längder. (4p)