1. Avbildningsmatrisens kolonner ges av bilderna av basvektorerna $\vec{e}_1$ och $\vec{e}_2$. Om A betecknar den linjära avbildningen, får vi

$$\begin{aligned} A\vec{e}_1 &= \vec{e}_1 - 2(\vec{e}_1 \cdot \hat{n})\hat{n} \\ A\vec{e}_2 &= \vec{e}_2 - 2(\vec{e}_2 \cdot \hat{n})\hat{n} \end{aligned}$$

där $\hat{n}$ är en enhetsnormal till linjen. Då linjens ekvation på normalform är $2x - y = 0$ kan vi ta $\hat{n} = \frac{1}{\sqrt{5}}(2, -1)$. Det ger

$$\begin{aligned} A\vec{e}_1 &= (1,0) - \frac{2}{5}((1,0) \cdot (2,-1))(2,-1) \\ &= \left(-\frac{3}{5}, \frac{4}{5}\right) \\ A\vec{e}_2 &= (0,1) - \frac{2}{5}((0,1) \cdot (2,-1))(2,-1) \\ &= \left(\frac{4}{5}, \frac{3}{5}\right). \end{aligned}$$

Vi får alltså avbildningsmatrisen

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} -\frac{3}{5} & \frac{4}{5} \\ \frac{4}{5} & \frac{3}{5} \end{pmatrix}.$$

2. Tangentplanet i punkten (a, b) till en graf $z = f(x, y)$ ges av ekvationen

$$z = f(a,b) + \frac{\partial f}{\partial x}(a,b)(x-a) + \frac{\partial f}{\partial y}(a,b)(y-b).$$

I vårt fall är punkten $(1, -1)$ och $f(x, y) = x^3 + 2x^2 - y^4$ så

$$z = f(1,-1) + \frac{\partial f}{\partial x}(1,-1)(x-1) + \frac{\partial f}{\partial y}(1,-1)(y+1) = 2 + 7(x-1) + 4(y+1).$$

Svar: $z = 2 + 7(x - 1) + 4(y + 1)$ eller omskrivet $7x + 4y - z = 1$.

3. Låt $f(x, y, z) = xz - z^3y + y^2 - 2$. Vi har att

$$\frac{\partial f}{\partial z}(0,1,-1) = x - 3z^2y|_{(0,1,-1)} = -3 \neq 0,$$

så z går att se som funktion av x och y i en omgivning av punkten $(0, 1, -1)$. För att bestämma derivatan $z'_x(0, 1)$ deriverar vi ekvationen $xz(x, y)-(z(x, y))^3y+y^2 = 2$ med avseende på x,(men observera att z inte längre ses som en oberoende variabel) vilket ger

$$z(x,y) + xz'_x(x,y) - 3z'_x(x,y)(z(x,y))^2y = 0$$

och med punkten $(0, 1)$ insatt

$$-1 - 3z'_x(0,1) = 0$$

dvs $z'_x(0, 1) = -\frac{1}{3}$.

4. Vi byter variabler för att göra om området till en rektangel

$$T^{-1}: \begin{cases} u = y \\ v = x + y. \end{cases}$$

Vi har att

$$\det J_{T^{-1}} = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -1.$$

Så $|\det J_T| = 1$ och vi får

$$\iint_\Omega y^2\, dxdy = \int_{-2}^{2} \int_{-1}^{1} u^2\, dudv = 4 \left[\frac{u^3}{3} \right]_{-1}^{1} = \frac{8}{3}.$$

Svar: $\frac{8}{3}$.

5. Vi har att

$$\frac{\partial \vec{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \vec{r}}{\partial v} = (1, 0, -1) \times (0, 1, -1) = (1, 1, 1)$$

där vi observerar att z-komponenten är positiv. Därmed blir

$$\iint_\Sigma \vec{F}(\vec{r}) \cdot \hat{n}(\vec{r})\, d\sigma = \int_0^1 \int_0^{1-v} (u, v, 1 - u - v) \cdot (1, 1, 1)\, dudv = \int_0^1 \int_0^{1-v} dudv = \frac{1}{2}.$$

Svar: $\frac{1}{2}$.

6. Skärningen är $x^2 + 2y^2 = 3$. För att beräkna ellipsens area gör vi ett koordinatbyte

$$T^{-1} = \begin{cases} u = x \\ v = \sqrt{2}y. \end{cases}$$

Vi får

$$|\det J_{T^{-1}}| = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \sqrt{2} \end{vmatrix} = \sqrt{2}.$$

vilket ger att

$$\iint_{x^2+2y^2 \le 3} dxdy = \frac{1}{\sqrt{2}} \iint_{u^2+v^2 \le 3} dudv = \frac{3\pi}{\sqrt{2}}.$$

Svar: ellipsens area blir $\frac{3\pi}{\sqrt{2}}$.

7. Andra ordningens Taylorutveckling ges av

$$f(x, y) = f(1, 0) + \frac{\partial f}{\partial x}(1, 0)(x - 1) + \frac{\partial f}{\partial y}(1, 0)y +$$
$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(1, 0)\frac{(x - 1)^2}{2} + \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(1, 0)(x - 1)y + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(1, 0)\frac{y^2}{2} + O((\sqrt{(x - 1)^2 + y^2})^3).$$

Eftersom den angivna Taylorutvecklingen i problemet saknar första grads termer får vi så att

$$\frac{\partial f}{\partial x}(1,0) = 0$$

och

$$\frac{\partial f}{\partial y}(1,0) = 0,$$

dvs grad $f(1,0) = (0,0)$, vilket visar att punkten är stationär. Vi ser också att Hesse matrisen

$$\mathbf{H} = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(1,0) & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(1,0) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(1,0) & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(1,0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}.$$

Då $\det \mathbf{H} = 4 > 0$ och $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(1,0) = 4 > 0$ är punkten en minpunkt.

8. Kedjeregeln ger att

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2g'$$

och att

$$\frac{\partial f}{\partial y} = 5g'$$

så

$$5\frac{\partial f}{\partial x} - 2\frac{\partial f}{\partial y} = 10g' - 10g' = 0,$$

vilket visar *a*). För *b*) använder vi koordinatbytet

$$\begin{cases} u = 2x + 5y \\ v = 5x - 2y. \end{cases}$$

Kedjeregeln ger att

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial \tilde{f}}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial \tilde{f}}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x} = 2\frac{\partial \tilde{f}}{\partial u} + 5\frac{\partial \tilde{f}}{\partial v}$$

och

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial \tilde{f}}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial \tilde{f}}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial y} = 5\frac{\partial \tilde{f}}{\partial u} - 2\frac{\partial \tilde{f}}{\partial v},$$

där $\tilde{f}(u,v) = f(x,y)$. Det ger att

$$0 = 5\frac{\partial f}{\partial x} - 2\frac{\partial f}{\partial y} = 10\frac{\partial \tilde{f}}{\partial u} + 25\frac{\partial \tilde{f}}{\partial v} - 10\frac{\partial \tilde{f}}{\partial u} + 4\frac{\partial \tilde{f}}{\partial v} = 29\frac{\partial \tilde{f}}{\partial v}.$$

Alltså, i u, v-koordinaterna blir ekvationen

$$\frac{\partial \tilde{f}}{\partial v} = 0,$$

som har lösningarna $\tilde{f}(u,v) = g(u)$ för någon deriverbar funktion g. Byter vi tillbaks till x, y-koordinaterna får vi att

$$f(x,y) = \tilde{f}(u,v) = g(u) = g(2x + 5y),$$

vilket visar *b*).

9. För att räkna flödesintegralen så parametriserar vi ytan med sfäriska koordinater

$$\vec{r}(\theta, \phi) = (\sin\theta\cos\phi, \sin\theta\sin\phi, \cos\theta).$$

Derivatorna med avseende på parametrarna blir

$$\frac{\partial\vec{r}}{\partial\theta} = (\cos\theta\cos\phi, \cos\theta\sin\phi, -\sin\theta),$$

$$\frac{\partial\vec{r}}{\partial\phi} = (-\sin\theta\sin\phi, \sin\theta\cos\phi, 0)$$

och vi får

$$\frac{\partial\vec{r}}{\partial\theta} \times \frac{\partial\vec{r}}{\partial\phi} = (\sin^2\theta\cos\phi, \sin^2\theta\sin\phi, \cos\theta\sin\theta).$$

Vi har vidare att

$$\operatorname{rot}\vec{F} = \nabla \times (-y, x, xy) = (x, -y, 2),$$

så

$$\int_0^{2\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin\theta\cos\phi, -\sin\theta\sin\phi, 2)\cdot(\sin^2\theta\cos\phi, \sin^2\theta\sin\phi, \cos\theta\sin\theta)\,d\theta d\phi =$$

$$\int_0^{2\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^3\theta(\cos^2\phi - \sin^2\phi) + 2\cos\theta\sin\theta\,d\theta d\phi = 2\pi\left[-\frac{\cos 2\theta}{2}\right]_0^{\pi} 2 = 2\pi.$$

Linjeintegralen är lättare för cirkeln kan parametriseras som $\vec{r}(t) = (\cos t, \sin t, 0)$ och vi får $\vec{r}'(t) = (-\sin t, \cos t, 0)$ vilket ger

$$\oint_S \vec{F}(\vec{r})\cdot d\vec{r} = \int_0^{2\pi} (-\sin t, \cos t, \cos t\sin t)\cdot(-\sin t, \cos t, 0)\,dt = \int_0^{2\pi} \sin^2 t + \cos^2 t\,dt = 2\pi.$$

Vi ser att resultaten blir lika, vilket skulle visas.

10. <u>Alt 1:</u> Ett sätt att lösa uppgiften på är att transformera till huvudaxelform. Matrisen som svarar mot andragradspolynomet är

$$K = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & -1 \\ 0 & -1 & 5 \end{pmatrix}.$$

Dess egenvärden ges av ekvationen $\det(K - \lambda E) = 0$, dvs

$$0 = \begin{vmatrix} 2-\lambda & 0 & 0 \\ 0 & 5-\lambda & -1 \\ 0 & -1 & 5-\lambda \end{vmatrix}. = (2-\lambda)(6-\lambda)(4-\lambda).$$

Så matrisen har egenvärden 2, 4, och 6. Egenvektorer till egenvärdet $\lambda = 2$ fås ur ekvationen

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & -1 \\ 0 & -1 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

som ger

$$\begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix} = k \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

På samma sätt får vi egenvektorerna

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{och} \quad \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

för $\lambda = 4$ respektive $\lambda = 6$. Huvudaxlarna ligger i egenvektorernas riktningar så huvudaxlarna har riktning $(1, 0, 0)$, $(0, 1, 1)$ och $(0, 1, -1)$. Den transformerade ekvationen blir

$$2\xi^2 + 4\eta^2 + 6\zeta^2 = 12$$

och längden på halvaxlarna fås genom att sätta två av variablerna till noll och bestämma den sista, med andra ord genom att dela 12 med vart och ett egenvärdena och ta roten ur resultatet.

$$\sqrt{\frac{12}{2}} = \sqrt{6}, \quad \sqrt{\frac{12}{4}} = \sqrt{3} \quad \text{och} \ \sqrt{\frac{12}{6}} = \sqrt{2}.$$

<u>Alt 2:</u> Ett alternativt sätt att lösa uppgiften är att först inse att det är samma sak att bestämma halvaxlarnas längder som att bestämma lokala max till funktionen $x^2 + y^2 + z^2$ under villkoret $g(x, y, z) = 0$ då $g(x, y, z) = 2x^2 + 5y^2 - 2yz + 5z^2 - 12$. Enligt Lagranges multiplikatrometod finns dessa punkter där $\operatorname{grad} f$ är parallell med $\operatorname{grad} g$ eller då $\operatorname{grad} g = (0, 0, 0)$. Vi har att

$$\begin{aligned} \operatorname{grad} f &= (2x, 2y, 2z), \\ \operatorname{grad} g &= (4x, 10y - 2z, -2y + 10z) \end{aligned}$$

så vi ser att $\operatorname{grad} g = (0, 0, 0)$ enbart då $(x, y, z) = (0, 0, 0)$ men den punkten är otillåten då den ej ligger på nivåytan. Det återstår därmed punkter där gradienterna är parallella

$$\begin{cases} 4x = \lambda 2x \\ 10y - 2z = \lambda 2y \\ -2y + 10z = \lambda 2z \\ g(x, y, z) = 0. \end{cases}$$

Om $x \neq 0$ ser vi från den första ekvationen att $\lambda = 2$ och det är lätt att se att y, z i det här fallet måste vara 0. Det ger $x = \pm\sqrt{6}$ vilket ger att halvaxelns längd är $\sqrt{f(\sqrt{6}, 0, 0)} = \sqrt{6}$ och riktningen på huvudaxeln blir $(1, 0, 0)$. Om $x = 0$ ger den första ekvationen ingenting men ekvationerna två och tre kan kombineras till $4z = (10 - 2\lambda)2y = (10 - 2\lambda)^2 z$ som ger $\lambda = 4$ eller $\lambda = 6$. Då $\lambda = 4$ blir $z = y = \pm\sqrt{\frac{3}{2}}$ som insatt i f ger värdet 3, vilket betyd att motsvarande halvaxel har längd $\sqrt{3}$. Huvudaxelns riktning är $(0, 1, 1)$. Slutligen ger $\lambda = 6$ att $z = -y = \pm 1$ vilket ger att halvaxeln har längd $\sqrt{f(0, 1, -1)} = \sqrt{2}$ och motsvarande huvudaxel har riktning $(0, 1, -1)$.