

UPPGIFT 838C

HÅKAN CARLQVIST

Eftersom jag inte var nöjd med genomgången av uppgift 838C på övningen idag kommer här lösningen i dokumentform.

Uppgift: Bestäm största och minsta värde för $f(x, y) = 3xy + 4y^2$ på $x^2 + y^2 \leq 1$.

Lösning: Kompakt område och kontinuerlig funktion medför att funktionen antar ett största och ett minsta värde på området. Vi delar upp problemet och tittar på det inre av området och randen av området.

1: $x^2 + y^2 < 1$ $f'_x = 3y$ och $f'_y = 3x + 8y$. $f'_x = f'_y = 0$ enbart i punkten $(0, 0)$. Enda kritiska punkten i det inre av området är punkten $(0, 0)$.

2: $x^2 + y^2 = 1$ Vid kritiska punkter på randen gäller att grad f är parallell med grad g där $g(x, y) = x^2 + y^2 - 1$. Vi har att grad $f = (3y, 3x + 8y) = \lambda$ grad $g = \lambda(2x, 2y)$ och $x^2 + y^2 - 1 = 0$. Vi får då ekvationssystemet.

$$\begin{cases} 3y = \lambda 2x & (1) \\ 3x + 8y = \lambda 2y & (2) \\ x^2 + y^2 - 1 = 0 & (3) \end{cases}$$

$x = 0$ i ekvation (1) medför att $y = 0$ vilket är en punkt som inte ligger på randen. Vi antar att $x \neq 0$. Lös ut λ ur (1) och sätt in i (2). Vi får då att $3x + 8y = \frac{3y}{2x}2y$ vilket efter omskrivning (bägge leden multipliceras med $2x$) blir ekvationen $2x(3x + 8y) = 6y^2$ vilket kan skrivas som att $6x^2 + 16xy - 6y^2 = 0$. Dividera med två och vi får $3x^2 + 8xy - 3y^2 = 0$. Nu använder vi ekvationen för randen och sätter in i vårt uttryck vi fått. Vi ser att $x^2 = 1 - y^2$ och att $x = \pm\sqrt{1 - y^2}$. Sätt in detta i vårt uttryck och vi får då $3 - 6y^2 + 8y(\pm\sqrt{1 - y^2}) = 0$. Dela upp uttrycket med rotuttrycket på ena sidan och resten på den andra sidan av likhetstecknet. Kvadrera och vi får att $(6y^2 - 3)^2 = 64y^2(1 - y^2)$. Utveckling ger att $36y^4 - 36y^2 + 9 = 64y^2 - 64y^4$. Flytta allt på ena sidan av likhetstecknet. Vi får då att $100y^4 - 100y^2 + 9 = 0$. Dividera med 10 och kvadratkomplettera. $0 = y^4 - y^2 - 9/10 = (y^2 - 1/2)^2 - 1/4 + 9/10 = (y^2 - 1/2)^2 - 16/100 = (y^2 - 1/2 - 4/10)(y^2 - 1/2 + 4/10) = (y^2 - 9/10)(y^2 - 1/10)$. Vi ser att vi har nollställen då $y = \pm 3/\sqrt{10}$ och $y = \pm 1/\sqrt{10}$ dvs intressanta punkter är $1/\sqrt{10}(\pm 1, \pm 3)$ och $1/\sqrt{10}(\pm 3, \pm 1)$. Insättning i det ursprungliga uttrycket ($3y^2 - 3x^2 - 16xy = 0$) ger att enbart följande punkter är korrekta: $\pm 1/\sqrt{10}(3, -1)$ och $\pm 1/\sqrt{10}(1, 3)$. Vi ser att vi har ett antal punkter att kontrollera. Kritiska punkten i det inre av området ger $f(0, 0) = 0$. Randpunkterna ger att $f(1/\sqrt{10}, 3/\sqrt{10}) = f(-1/\sqrt{10}, -3/\sqrt{10}) = 9/10 + 36/10 = 45/10 = 9/2$ och att $f(3/\sqrt{10}, -1/\sqrt{10}) = f(-3/\sqrt{10}, 1/\sqrt{10}) = -9/10 + 4/10 = -1/2$. Svar: Största värde är $9/2$ och minsta värde är $-1/2$.