LÖSNINGSFÖRSLAG LAPPSKRIVNING 1 FÖR IT-PROGRAMMET VT 06 TISDAGEN 14/2 13.15-14.00 VERSION A

ANALYTISKA METODER OCH LINJÄR ALGEBRA II

Uppgift1 : Antag att avbildningen $\mathcal{B}$:s överforingsmatris är B. Då måste gälla att $\bar{x} = B\bar{y}$. $\bar{y} = A\bar{x} \Leftrightarrow \bar{y} = A^{-1}\bar{x}$ dvs $B = A^{-1}$.

$$B = A^{-1} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Uppgift2 :

Matrisens egenvärden uträknas genom

$$0 = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 2 \\ 2 & 1-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)^2 - 4 = (1-\lambda-2)(1-\lambda+2) = -(1+\lambda)(3-\lambda)$$

Egenvärdena blev $\lambda_1 = -1$ och $\lambda_2 = 3$. Egenvektor till egenvärdet -1 fås genom att lösa ekvationsssystemet

$$\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

om man använder Gausselimination. Vi får då sambandet $v_1 + v_2 = 0$ och vi kan då välja en egenvektor som $\bar{v}_{\lambda=-1} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$. Eftersom vi har en symmetrisk matris är egenvektorerna ortogonala mot varandra. Vi ser att vektorn $\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ är ortogonal mot $\bar{v}_{\lambda=-1}$. Detta måste då vara egenvektorn $\bar{v}_{\lambda=3}$. Tag alltså basen $\left\{\bar{f}_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \bar{f}_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}$. Matrisen A blir i denna bas $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$

Uppgift3 :

Tag exempelvis och räkna ut koefficientdeterminanten.

$$\begin{vmatrix} 0 & 2 & 3 \\ 1 & -2 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \end{vmatrix} = (-2)\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} + 3\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = (-2)(1) + 3(1+4) = 13 \neq 0$$

Koefficientdeterminanten är skild från 0 och således är vektorerna linjärt oberoende och utgör en bas i $\mathbb{R}^3$