LÖSNINGSFÖRSLAG LAPPSKRIVNING 1 FÖR IT-PROGRAMMET VT 06 TISDAGEN 14/2 13.15-14.00 VERSION B

ANALYTISKA METODER OCH LINJÄR ALGEBRA II

Uppgift1 : Antag att avbildningen $\mathcal{B}$:s överforingsmatris är B. Då måste gälla att $\bar{x} = B\bar{y}$. $\bar{y} = A\bar{x} \Leftrightarrow \bar{y} = A^{-1}\bar{x}$ dvs $B = A^{-1}$.

$$B = A^{-1} = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 4 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Uppgift2 :

Matrisens egenvärden uträknas genom

$$0 = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 3 \\ 3 & 1-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)^2 - 9 = (1-\lambda-3)(1-\lambda+3) = -(2+\lambda)(4-\lambda)$$

Egenvärdena blev $\lambda_1 = -2$ och $\lambda_2 = 4$. Egenvektor till egenvärdet -2 fås genom att lösa ekvationsssystemet

$$\begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 3 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

om man använder Gausselimination. Vi får då sambandet $v_1 + v_2 = 0$ och vi kan då välja en egenvektor som $\bar{v}_{\lambda=-1} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$. Eftersom vi har en symmetrisk matris är egenvektorerna ortogonala mot varandra. Vi ser att vektorn $\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ är ortogonal mot $\bar{v}_{\lambda=-1}$. Detta måste då vara egenvektorn $\bar{v}_{\lambda=3}$. Tag alltså basen $\left\{\bar{f}_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \bar{f}_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}$. Matrisen A blir i denna bas $\begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$

Uppgift3 :

Tag exempelvis och räkna ut koefficientdeterminanten.

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & -2 \\ -2 & 1 & 0 \\ -4 & 3 & -4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 3 & -4 \end{vmatrix} + (-2)\begin{vmatrix} -2 & 1 \\ -4 & 3 \end{vmatrix} = (-4) - 2(-6+4) = 0$$

Koefficientdeterminanten är lika med 0 och således är vektorerna linjärt beroende och utgör inte en bas i $\mathbb{R}^3$