LAPPSKRIVNING 4 FÖR IT-PROGRAMMET VT 06 TISDAGEN 25/4 13.15-14.00 VERSION B

ANALYTISKA METODER OCH LINJÄR ALGEBRA II

En korrekt och välmotiverad lösning till en uppgift genererar 3 p. Maximalt kan du få ihop 9 p. Du behöver 5 p för att bli godkänd. Observera att enbart angivet svar på en uppgift automatiskt genererar i 0 p. Var noga med att tydligt beskriva din slutsats.

Uppgift1 :

Beräkna integralen

$$\iint_D y^2 dxdy$$

där D är området som begränsas av linjerna $x+y=0$, $x-y=0$ och $x=2$.

Lösning: Integrera först i y-led. Området begränsas då av $-x \leq y \leq x$ och $0 \leq x \leq 2$. Vi får dåintegralen

$$\iint_D xy^2 dxdy = \int_{x=0}^{2} \left(\int_{y=-x}^{x} y^2 dy \right) dx = \int_{x=0}^{2} \left[\frac{y^3}{3} \right]_{y=-x}^{x} dx = \frac{2}{3} \int_0^2 x^3 dx = \frac{8}{3}$$

Uppgift2 :

Beräkna kurvintegralen

$$\int_\gamma ydx - xdy$$

där γ är den del av enhetscirkeln som går i negativ riktning från punkten (0,1) till punkten (1,0)

Lösning: Parametrisera enhetscirkeln genom att sätta $x = \cos t$ och $y = \sin t$. Vi får att $dx = -\sin tdt$ och $dy = \cos tdt$. Gränserna för t blir $\frac{\pi}{2}$ och 0 dvs

$$\int_\gamma ydx - xdy = \int_{\frac{\pi}{4}}^{0} -(\sin^2 t + \cos^2 t)dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} dt = \frac{\pi}{2}$$

Uppgift3 :

Låt $F = (F_1(x,y), F_2(x,y))$ vara ett konservativt kraftfält där F_1 och F_2 är C^1-funktioner i planet. Låt γ vara en sluten, styckvis C^1-kurva. Visa att

$$\int_\gamma F \cdot dr = 0$$

lösning: I och med att F är ett konservativt fält sågäller att

$$\frac{\partial}{\partial x}(F_2) = \frac{\partial}{\partial y}(F_1)$$

Antag att γ genomlupes i positiv riktning. Eftersom γ är en sluten kurva kan vi använda Greens formel. Antag att γ omsluter arean D. Vi får då att

$$\int_\gamma F\cdot dr = \int_\gamma F_1 dx + F_2 dy = \iint_D \left(\frac{\partial}{\partial x}(F_2) - \frac{\partial}{\partial y}(F_1)\right) dxdy = \iint_D 0 dxdy = 0.$$

Lycka till!

Håkan