Dagens 18/1

1. En linär avbildning A har matrisen $[A] = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$.

   a. Låt $\boldsymbol{u} = (3, -1)$. Bestäm $A(\boldsymbol{u})$.

   b. Bestäm alla vektorer $\boldsymbol{v}$ så att $A(\boldsymbol{v}) = (3,-1)$.

   c. Bestäm bilden av linjen $x - 2y = 0$ dvs beskriv mängden av alla punkter $A(x,y)$ där (x,y) uppfyller linjens ekvation.

2. För en linjär avbildning $A\colon \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$ gäller att $A(2,-1) = (1,3)$ och $A(-1,1) = (1,1)$. Bestäm matrisen $[A]$ för A.

   Tips: Antag att $[A] = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$. Lös ekvationssystemet $[A]\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$, $[A]\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

3. För en inverterbar avbildning $A\colon \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$ gäller att $A(-1,1) = (3,1)$ och $A^{-1}(6,7) = (2,1)$. Bestäm matrisen $[A]$ för A.

4. Låt $A\colon \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$ vara multiplikation med matrisen $\boldsymbol{A}$. Undersök om A är inverterbar och om så är fallet bestäm inversen till A då

   a. $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.   b. $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

5. En avbildning $A\colon \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$ ges av $A(x,y,z) = (x + 2y + z,\ x^k + y + 2z,\ 2x + 3y + 3z)$.

   a. Bestäm k så att A blir en linjär avbildning.

   För detta k–värde

   b. Bestäm matrisen $[A]$.

   c. Verifiera att $A(2,1,0) = (4,3,7)$.

   d. Bestäm alla vektorer $\boldsymbol{v}$, sådana att $A(\boldsymbol{v}) = (4,3,7)$.

   e. Ange, som en slutsats av resultatet i d., värdet av $\det([A])$.

   f. Finns det någon vektor $\boldsymbol{v}$ sådan att $A(\boldsymbol{v}) = (3,7,4)$?

Svar:

1. a. $(1, 5)$.   b. $(-7,5)$.   c. linjen $5x - 2y = 0$.

2. $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}$.

3. $\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$.

4. a. Ej inverterbar.

   b. Inverterbar, $[A^{-1}] = [A]^{-1} = \boldsymbol{A}^{-1}$, och $A^{-1}(x,y,z) = (z - x,\ x + y - 2z,\ x - y + z)$.

5. a. $k = 1$.   b. $[A] = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 3 \end{pmatrix}$ d. $\boldsymbol{v} = (2 - 3t,\ t + 1,\ t)$.

   e. 0.   f. Nej.

Dagens 19/1

1. Undersök om vektorn $(2,1,0,-1)$ tillhör värdemängden av avbildningen
$$A: \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^4,\ \text{där } A(x,y,z) = (2x + y + z,\ x - y + 2z,\ y - z,\ x + 2y + z)$$
dvs undersök om det finns någon vektor (x,y,z) sådan att $A(x,y,z) = (2,1,0,-1)$.

2. Två linjära avbildningar A och B, av typen $\mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$, ges enligt följande:
$$A(x,y) = (x + y,\ x - y) \text{ och } [B] = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$
Bestäm matriserna för avbildningarna $\frac{1}{2}A \circ B$ och $\frac{1}{2}B \circ A$ samt tolka dessa geometriskt.

3. Avgör vilka av följande avbildningar i $\mathbf{R}^2$ är linjära och om så är fallet ange matriser för dessa. Varje vektor
   a. förlängs med en faktor 2.
   b. speglas i origo.
   c. adderas till vektorn (1,2).
   d. avbildas på vektorn (0,0).
   e. avbildas på vektorn (1,1).
   f. speglas i linjen $x + y = 0$.
   g. projiceras på linjen $y = 2x$.

4. Bestäm matrisen för rotationen (i $\mathbf{R}^2$) moturs med vinkel $\pi/3$ enligt följande:
   a. Rita en figur med hjälp av vilken du bestämmer bilden av vektorn $\mathbf{e}_x$ under denna rotation.
   b. Uppreppa detta med vektorn $\mathbf{e}_y$.

5. Låt $A: \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$ vara rotationen moturs med vinkel $\pi/4$. Bestäm bilden av
   a. punkten (2,4). b. linjen $y = 2x$. c. ellipsen $9x^2 + y^2 = 1$.
   d. hyperbeln $9x^2 - y^2 = 1$. e. parabeln $y = x^2$.

   Tips cde: Bestäm den inversa rotationen på formen $(x,y) = A^{-1}(w_1, w_2)$ och substituera $x = \ldots$ och $y = \ldots$ i den givna ekvationen.

Svar:

1. Tillhör värdemängden.
2. $\frac{1}{2}A \circ B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ spegling m.a.p. x–axeln; $\frac{1}{2}B \circ A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ spegling m.a.p. linjen $x = y$.
3. a. linjär, $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ b. linjär, $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ c. ej linjär. d. linjär, $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$
   e. ej linjär. f. linjär, $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$. g. linjär, $\begin{pmatrix} 1/5 & 2/5 \\ 2/5 & 4/5 \end{pmatrix}$.
4. $\begin{pmatrix} 1/2 & -\sqrt{3}/2 \\ \sqrt{3}/2 & 1/2 \end{pmatrix}$. Man får: a. $\begin{pmatrix} 1/2 \\ \sqrt{3}/2 \end{pmatrix}$. b. $\begin{pmatrix} -\sqrt{3}/2 \\ 1/2 \end{pmatrix}$.
5. a. $(-\sqrt{2}, 3\sqrt{2})$. b. $w_2 = -3w_1$. c. $5w_1^2 + 8w_1w_2 + 5w_2^2 = 1$.
   d. $4w_1^2 + 10w_1w_2 + 4w_2^2 = 1$. e. $w_1^2 + 2w_1w_2 + w_2^2 + \sqrt{2}w_1 - \sqrt{2}w_2 = 0$.