Dagens 23/1

1. För en linjär avbildning $A: \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$ gäller att $A(1,1) = (3,7)$ och $A(2,1) = (4,10)$. Bestäm $A(1,2)$.

   Tips: Skriv $(1,2)$ som en linjär kombination av $(1,1)$ och $(2,1)$, dvs bestäm a och b så att $(1,2) = a(1,1) + b(2,1)$. Lineariteten av A medför att $A(1,2) = aA(1,1) + bA(2,1)$.

2. För en linjär avbildning $A: \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$ gäller att $A(1,1) = (7,3)$ och $A(2,1) = (10,4)$. Bestäm den vektor (vektorer) $\boldsymbol{v}$ för vilken $A(\boldsymbol{v}) = (4,2)$.

   Tips: Skriv $(4,2)$ som en linjär kombination av $(7,3)$ och $(10,4)$, dvs bestäm a och b så att $(4,2) = a(7,3) + b(10,4)$. Lineariteten av A medför att $A(4,2) = aA(7,3) + bA(10,4)$.

3. För en linjär avbildning $A: \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$ gäller att $A(\mathbf{e}_x) = (1,3,2)$, $A(\mathbf{e}_y) = (1,2,1)$ och $A(2,1,-1) = (2,7,4)$. Bestäm matrisen $[A]$.

   Ledning: Skriv $\mathbf{e}_z$ som en linjär kombination av $\mathbf{e}_x$, $\mathbf{e}_x$, $(2,1,-1)$, dvs bestäm a, b och c så att $\mathbf{e}_z = a\mathbf{e}_x + b\mathbf{e}_x + c(2,1,-1)$. Lineariteten av A medför att $A(\mathbf{e}_z) = a\mathrm{A}(\mathbf{e}_x) + b\mathrm{A}(\mathbf{e}_x) + cA(2,1,-1)$.

4. Undersök sanningshalten i följande påståenden:

   För varje linjär avbildning $A: \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$ och för godtyckliga vektorer $\boldsymbol{u}$ och $\boldsymbol{v}$ i $\mathbf{R}^2$ gäller att

   a. Om $\boldsymbol{u}$ och $\boldsymbol{v}$ är ortogonala så är också $A(\boldsymbol{u})$ och $A(\boldsymbol{v})$ ortogonala.

   b. Om $\boldsymbol{u}$ och $\boldsymbol{v}$ inte är ortogonala så är heller inte $A(\boldsymbol{u})$ och $A(\boldsymbol{v})$ ortogonala.

   c. Om $\boldsymbol{u}$ och $\boldsymbol{v}$ inte är parallella så är heller inte $A(\boldsymbol{u})$ och $A(\boldsymbol{v})$ parallella.

   d. Om $\boldsymbol{u}$ och $\boldsymbol{v}$ är parallella så är också $A(\boldsymbol{u})$ och $A(\boldsymbol{v})$ parallella.

Svar:

1. $(5,11)$.
2. $(0,1)$.
3. $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.
4. a. Lögn! Om A är projektionen på x–axeln samt $\boldsymbol{u} = (1,1)$ och $\boldsymbol{v} = (1,-1)$, så är $\boldsymbol{u}$ och $\boldsymbol{v}$ ortogonala, men $A(\boldsymbol{u})$ och $A(\boldsymbol{v})$ inte.

   b. Lögn! Om A är projektionen på x–axeln samt $\boldsymbol{u} = (1,1)$ och $\boldsymbol{v} = (0,1)$, så är $\boldsymbol{u}$ och $\boldsymbol{v}$ inte ortogonala, medan $A(\boldsymbol{u})$ och $A(\boldsymbol{v})$ är det.

   c. Lögn! Exempel i svaret till a visar att $A(\boldsymbol{u})$ och $A(\boldsymbol{v})$ kan vara parallella även om $\boldsymbol{u}$ och $\boldsymbol{v}$ inte är det.

   d. Sant! Antag att $[A] = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ och $\boldsymbol{u} = (x,y)$. Om $\boldsymbol{v}$ är parallell med $\boldsymbol{u}$ så är $\boldsymbol{v} = (tx,ty)$ för något tal t. Verifiera att $A(\boldsymbol{v}) = tA(\boldsymbol{u})$, dvs $A(\boldsymbol{u})$ och $A(\boldsymbol{v})$ är parallella.

Dagens 24/1

1. Skriv vektorn $(1,-2)$ i $\mathbf{R}^2$ som en linjär kombination av $(2,1)$ och $(3,2)$.

2. Betrakta vektorerna $(1,1,2)$, $(1,0,1)$ och $(2,-2,0)$
   a. Är vektorn $(1,1,1)$ en linjär kombination av dessa vektorer?
   b. Är vektorn $(1,1,2)$ en linjär kombination av dessa vektorer?

3. Avgör om följande vektorer är linjärt oberoende eller ej:
   a. $(1,3,2,2)$, $(1,0,-1,1)$, $(1,1,0,0)$. (Vektorerna $\boldsymbol{u}$, $\boldsymbol{v}$, $\boldsymbol{w}$ är linjärt oberoende $\Leftrightarrow$ om likheten $a\boldsymbol{u} + b\boldsymbol{v} + c\boldsymbol{w} = \mathbf{0}$ inträffar endast för $a = b = c = 0$.)
   b. $(1,3,2,-2)$, $(1,0,-1,1)$, $(1,1,0,0)$.
   c. $(1,3,2)$, $(2,1,1)$.
   d. $(1,3,2)$, $(2,1,1)$, $(3,4,3)$.
   e. $(1,3,2)$, $(2,1,1)$, $(3,4,2)$.
   f. $(1,3,2)$, $(2,1,1)$, $(3,4,2)$, $(3,4,3)$.

4. Undersök om vektorerna b.–f. i uppgiften 3 bildar en bas i $\mathbf{R}^3$.

5. a. Visa att vektorn $\boldsymbol{u} = (1,2,3,4)$ är en linjär kombination av vektorerna $\boldsymbol{v} = (1,2,2,3)$ och $\boldsymbol{w} = (1,2,1,2)$. (Dvs. visa att det finns konstanter a och b sådana att $\boldsymbol{u} = a\boldsymbol{v} + b\boldsymbol{w}$.)
   b. Är vektorn $\boldsymbol{u} = (2,3,4,5)$ en linjär kombination av vektorerna $\boldsymbol{v}$ och $\boldsymbol{w}$?

Svar:

1. $(1,-2) = 8(2,1) - 5(3,2)$.
2. a. nej. b. ja.
3. a. linjärt oberoende. b. linjärt beroende.
   c. linjärt oberoende. d. linjärt beroende.
   e. linjärt oberoende. f. linjärt beroende.
4. b. bildar inte en bas. c. bildar inte en bas. d. bildar inte en bas.
   e. bildar en bas. f. bildar inte en bas.
5. b. Nej.

Dagens 25/1

1. Undersök om $(2,-1,6)$ är en linjärkombination av $(1,-2,0)$, $(0,1,2)$, $(5,-6,8)$.

2. Undersök om vektorerna $(1,2,3)$, $(3,2,1)$, $(2,1,3)$ bildar en bas för $\mathbf{R}^3$.

3. Vilka av följande vektoruppsättningar är linjärt oberoende:
   a. $(-2,0,0)$, $(8,0,-5)$, $(-1,0,3)$
   b. $(1,3,-2)$, $(-3,-5,6)$, $(0,5,-6)$?

4. Vilka av följande vektoruppsättningar spänner upp $\mathbf{R}^3$:
   a. $(1,2,3)$, $(0,2,3)$, $(0,0,3)$.
   b. $(1,0,2)$, $(3,0,1)$, $(5,0,-2)$, $(7,0,-4)$?

5. Bestäm talet a så att $(1-a,2,0)$ och $(6,4,a+2)$ är linjärt beroende.

Svar:

1. Ja.
2. Bildar en bas.
3. b.
4. a.
5. $a = -2$.

Dagens 26/1

1. Bestäm transformationsmatrisen för övergången från
   a. basen $\boldsymbol{e} = \{\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2\}$ till basen $\boldsymbol{f} = \{2\boldsymbol{e}_1 + 3\boldsymbol{e}_2, 4\boldsymbol{e}_1 + 5\boldsymbol{e}_2\}$ (den nya basen $\boldsymbol{f}$ består alltså av vektorerna $\boldsymbol{f}_1$ och $\boldsymbol{f}_2$ med koordinaterna (2,3) respektive (4,5) i den gamla basen $\boldsymbol{e}$).
   b. basen $\{\boldsymbol{e}_1 + \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_1 + 2\boldsymbol{e}_2\}$ till basen $\{\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2\}$.
   c. basen $\{\boldsymbol{e}_1 + 2\boldsymbol{e}_2, 2\boldsymbol{e}_1 + \boldsymbol{e}_2\}$ till basen $\{\boldsymbol{e}_1 + 5\boldsymbol{e}_2, 3\boldsymbol{e}_1 + 3\boldsymbol{e}_2\}$.

2. a. Vektorn $\boldsymbol{v}$ har i basen $\{\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2\}$ koordinaterna (2,1). Vilka är koordinaterna för $\boldsymbol{v}$ i basen $\{\boldsymbol{e}_1 + \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_1 + 2\boldsymbol{e}_2\}$?
   b. Vektorn $\boldsymbol{v}$ har i basen $\{\boldsymbol{e}_1 + \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_1 + 2\boldsymbol{e}_2\}$ koordinaterna (3,4). Vilka är koordinaterna för $\boldsymbol{v}$ i basen $\{\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2\}$?

3. I $\mathbf{R}^2$ med basvektorer $\{\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2\}$ väljs vektorerna med koordinaterna (4,3) respektive (3,2) som nya basvektorer $\{\boldsymbol{f}_1, \boldsymbol{f}_2\}$.
   a. Vilka är koordinaterna i det nya systemet för den $\boldsymbol{v}$ vektor som i det gamla systemet har koordinaterna (2,1)?
   b. Vilka är koordinaterna i det gamla systemet för den $\boldsymbol{v}$ vektor som i det nya systemet har koordinaterna (1,–1)?
   c. Vilken är ekvationen i det nya systemet för den räta linje som i det gamla systemet har ekvationen $x - y = 2$?

4. Undersök vilka av följande matriser beskriver en transformation mellan två baser:
   a. $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$.   b. $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.   c. $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

5. Undersök vilka av följande matriser beskriver en ON–transformation mellan två baser:
   a. $\begin{pmatrix} 3 & 4 & 0 \\ 4 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$.   b. $\begin{pmatrix} 3 & 4 & 0 \\ 4 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$.   c. $\frac{1}{5}\begin{pmatrix} 3 & 4 & 0 \\ 4 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$.   d. $\frac{1}{15}\begin{pmatrix} 5 & 10 & 10 \\ 2 & -11 & 10 \\ 14 & -2 & -5 \end{pmatrix}$.

Svar:

1. a. $\begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}$ b. $\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ c. $\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$.
2. a. (3,–1)   b. (7,11).
3. a. (–1,2)   b. (1,1)   c. $u + v = 2$
4. Endast matrisen i c.
5. Endast matriser i c och d.