Dagens 30/1

1. En linjär avbildnig har i basen $\boldsymbol{e}$ matrisen $\boldsymbol{A_e}$ och i basen $\boldsymbol{f}$ matrisen $\boldsymbol{A_f}$. Bestäm

   a. $\boldsymbol{A_f}$ om $\boldsymbol{A_e} = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}$ och $\boldsymbol{f} = \{\boldsymbol{e}_1 + 3\boldsymbol{e}_2, 2\boldsymbol{e}_1 + 4\boldsymbol{e}_2\}$.

   b. $\boldsymbol{A_e}$ om $\boldsymbol{A_f} = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}$ och $\boldsymbol{f} = \{\boldsymbol{e}_1 + 3\boldsymbol{e}_2, 2\boldsymbol{e}_1 + 4\boldsymbol{e}_2\}$.

   c. $\boldsymbol{A_e}$ om $\boldsymbol{A_f} = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}$ och $\boldsymbol{e} = \{\boldsymbol{f}_1 + 3\boldsymbol{f}_2, 2\boldsymbol{f}_1 + 4\boldsymbol{f}_2\}$.

   d. $\boldsymbol{A_f}$ om $\boldsymbol{A_e} = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}$ och $\boldsymbol{e} = \{\boldsymbol{f}_1 + 3\boldsymbol{f}_2, 2\boldsymbol{f}_1 + 4\boldsymbol{f}_2\}$.

2. Bestäm egenvärden och egenvektorer till följande matriser:

   a. $\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 8 & -1 \end{pmatrix}$ b. $\begin{pmatrix} 10 & -9 \\ 4 & -2 \end{pmatrix}$ c. $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

3. Bestäm egenvärden och egenvektorer till följande matriser:

   a. $\begin{pmatrix} 5 & 3 & -2 \\ -4 & -2 & 2 \\ 2 & 2 & 0 \end{pmatrix}$. b. $\begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$. c. $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

4. I xy–planet införs nya uv–koordinater genom att man tar vektorerna $\boldsymbol{f}_1 = (1,3)$ och $\boldsymbol{f}_2 = (2,1)$ som nya basvektorer. Vilken är ekvationen i det nya koordinatsystemet för den räta linje som i det ursprungliga systemet har ekvationen $2x + y = 5$?

Svar:

1. a. $\begin{pmatrix} -3 & -4 \\ 7 & 10 \end{pmatrix}$ b. $\frac{1}{2}\begin{pmatrix} -1 & 7 \\ -1 & 15 \end{pmatrix}$ c. $\begin{pmatrix} -3 & -4 \\ 7 & 10 \end{pmatrix}$

   d. $\frac{1}{2}\begin{pmatrix} -1 & 7 \\ -1 & 15 \end{pmatrix}$

2. a. $\lambda_1 = -1,\ \lambda_2 = 3,\ \boldsymbol{v}_1 = (0,1),\ \boldsymbol{v}_2 = (1,2)$.

   b. $\lambda_1 = \lambda_2 = 4,\ \boldsymbol{v} = (3,2)$.

   c. $\lambda_1 = \lambda_2 = 0,\ \boldsymbol{v}_1 = (1,0),\ \boldsymbol{v}_2 = (0,1)$.

3. a. $\lambda_1 = 0,\ \lambda_2 = 1,\ \lambda_3 = 2,\ \boldsymbol{v}_1 = (1,-1,1),\ \boldsymbol{v}_2 = (1,0,2),\ \boldsymbol{v}_3 = (1,-1,0)$.

   b. $\lambda_1 = \lambda_2 = 1,\ \lambda_3 = 0,\ \boldsymbol{v}_1 = (-1,1,0),\ \boldsymbol{v}_2 = (1,0,1),\ \boldsymbol{v}_3 = (1,1,1)$.

   d. $\lambda_1 = \lambda_2 = 0,\ \lambda_3 = 1,\ \boldsymbol{v}_1 = (-2,-3,1),\ \boldsymbol{v}_3 = (1,1,0)$.

4. $u + v = 1$.

Dagens 31/1

1. Undersök om matrisen $\boldsymbol{A}$ är diagonaliserbar. Om så är fallet bestäm en matris $\boldsymbol{C}$ som diagonaliserar matrisen $\boldsymbol{A}$ och ange $\boldsymbol{C}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{C}$.

   a. $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 8 & -1 \end{pmatrix}$ b. $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 10 & -9 \\ 4 & -2 \end{pmatrix}$ c. $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

2. Betrakta matrisen $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}$.

   a. Verifiera att vektorerna $\boldsymbol{u} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ och $\boldsymbol{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix}$ är egenvektorer till $\boldsymbol{A}$.

   b. Ange motsvarande egenvärden.

   c. Bestäm en matris $\boldsymbol{C}$ som diagonaliserar $\boldsymbol{A}$ och ange denna diagonalmatris.

3. Undersök om matrisen $\boldsymbol{A}$ är diagonaliserbar. Om så är fallet bestäm en matris $\boldsymbol{C}$ som diagonaliserar matrisen $\boldsymbol{A}$ och ange $\boldsymbol{C}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{C}$.

   a. $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$. b. $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & -3 & 3 \end{pmatrix}$. c. $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Svar:

1. a. Diagonaliserbar. T.ex $\boldsymbol{C} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{C}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{C} = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$

   b. Ej diagonaliserbar.

   c. Diagonaliserbar. T.ex $\boldsymbol{C} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{C}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{C} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

2. b. Motsvarande egenvärden är 2 respektive 3.

   c. T.ex $\boldsymbol{C} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$. Motsvarande diagonalmatris är då $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$.

3. a. T.ex $\boldsymbol{C} = \begin{pmatrix} 2 & -2 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 3 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{C}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{C} = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

   b. Ej diagonaliserbar.

   c. T.ex $\boldsymbol{C} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{C}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{C} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

Dagens 1/2

1. Undersök om $\boldsymbol{v}$ är en egenvektorer till matrisen $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, och ange då motsvarande egenvärde, om

   a. $\boldsymbol{v} = (1,1,1,1)$.

   b. $\boldsymbol{v} = (1,-1,1,1)$.

2. Matrisen A har egenvärden 2, 3 och 4 med motsvarande egenvektorer (1,3,1), (1,1,0) resp. (1,2,1). Bestäm A.

3. Bestäm A^{11} då $A = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 2 \\ 1 & -1 & 2 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$.

4. I xy–planet införs nya uv–koordinater genom att man tar vektorerna $\boldsymbol{f}_1 = (1,2)$ och $\boldsymbol{f}_2 = (2,5)$ som nya basvektorer. En rät linje har i det nya systemet ekvationen $u + v = 1$. Vilken är linjens ekvation i det ursprungliga systemet?

Svar:

1. a. Egenvektor. Egenvärde 5. b. Ej egenvektor.

2. $\begin{pmatrix} 5 & -2 & 3 \\ 5 & -2 & 7 \\ 2 & -2 & 6 \end{pmatrix}$.

3. $\begin{pmatrix} 2048 & -2048 & 2048 \\ 2047 & -2047 & 2048 \\ 2047 & -2047 & 2048 \end{pmatrix}$.

4. $3x - y = 1$.

Dagens 2/2

1. Undersök om man kan bilda en bas i $\mathbf{R}^2$ bestående av egenvektorer till matrisen $\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$.

   Om så är fallet ange en sådan bas.

2. Vilka av följande matriser är ON–diagonaliserbara?

   a. $\begin{pmatrix} 5 & 3 & -2 \\ -4 & -2 & 2 \\ 2 & 2 & 0 \end{pmatrix}$. b. $\begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$.

3. Visa att matrisen $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$ är diagonaliserbar och bestäm $\boldsymbol{A}^{10}$.

4. Bestäm vilken typ av kurva i $\mathbf{R}^2$ som ges av ekvationen

   a. $3x^2 + 4xy + y^2 = 1$.

   b. $3x^2 + 2xy + y^2 = 1$.

5. Skriv på huvudaxelform och bestäm vilken typ av kurva i $\mathbf{R}^2$ som ges av ekvationen

   a. $6x^2 - 4xy + 9y^2 = 5$.

   b. $4xy + 3y^2 = 1$.

   c. $2y^2 + 4xy - x^2 = 1$.

Svar:

1. Det kan man inte.
2. b men inte a.
3. $\boldsymbol{A}^{10} = \begin{pmatrix} 512 & 512 & -512 \\ 511 & 513 & -512 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.
4. a. ellips b. hyperbel.
5. a. $2x^2 + y^2 = 1$, ellips.

   b. $4x^2 - y^2 = 1$, hyperbel.

   c. $3x^2 - 2y^2 = 1$, hyperbel.