Dagens 13/2

1. Beräkna gränsvärdet (eller visa att det inte finns):

   a. $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x^2\cos y + y^2\cos x}{x^2 + xy + y^2}$. Tips: undersök gränsvärdet längs linjer $y = \pm x$.

   b. $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x^2 y}{x^2 + xy + y^2}$. Tips: inför polära koordinater.

2. Kan funktionen $f(x,y) = \dfrac{y^2 - xy - 2x^2}{y - 2x}$ definieras i punkterna på linjen $y = 2x$ så att f blir kontinuerlig? Tips: $y^2 - xy - 2x^2 = (y - ?)\cdot(y - ??)$.

3. Beräkna partiella derivator till följande funktioner:

   a. $f(x,y) = \dfrac{x - y^2}{1 + xy}$

   b. $f(x,y) = \sqrt{1 + x^2 y}$

   c. $f(x,y,z) = \ln(z^2 + xy)$

4. Låt f vara en deriverbar funktion av en variabel. Visa att

   a. funktionen $z = f\left(\dfrac{y}{x}\right)$ uppfyller ekvationen $x\dfrac{\partial z}{\partial x} + y\dfrac{\partial z}{\partial y} = 0$.

      Tips: Sätt $t = y/x$. Vi har då $z = f(t)$ och $z'_x = f'(t)\cdot t'_x = f'(t)\cdot(-y/x^2)$.

   b. funktionen $z = f(2x^2 + 3y^2)$ uppfyller ekvationen $3y\dfrac{\partial z}{\partial x} - 2x\dfrac{\partial z}{\partial y} = 0$.

   c. funktionen $z = xy\, f\left(\dfrac{x}{y}\right)$ uppfyller ekvationen $x\dfrac{\partial z}{\partial x} + y\dfrac{\partial z}{\partial y} = 2z$.

Svar:

1. a. Finns inte. b. 0.

2. Funktionen f blir kontinuerlig i hela xy–planet om man i varje punkt (x,y) på linjen $y = 2x$ definierar $f(x,y) = x + y$.

3. a. $f'_x = \dfrac{1 + y^3}{(1 + xy)^2}$, $f'_y = -\dfrac{2y + x^2 + xy^2}{(1 + xy)^2}$

   b. $f'_x = \dfrac{xy}{\sqrt{1 + x^2 y}}$, $f'_y = \dfrac{x^2}{2\sqrt{1 + x^2 y}}$

   c. $f'_x = \dfrac{y}{z^2 + xy}$, $f'_y = \dfrac{x}{z^2 + xy}$, $f'_z = \dfrac{2z}{z^2 + xy}$

Dagens 14/2

1. Bestäm ekvationen för tangentplanet till ytan

   a. $z = x\ \ln(5x - 2y)$ i punkten $(1,2,0)$.

   b. $z = \dfrac{8x}{y} - xy + 1$ i punkten $(1,2,3)$.

2. Beräkna de partiella derivatorna av andra ordningen till följande funktioner:

   a. $f(x,y) = xy^2 + \dfrac{y}{x}$ b. $f(x,y) = \dfrac{y}{x - 2y}$

   c. $f(x,y) = \ln(1 - xy)$ d. $f(x,y\ ) = \arctan \dfrac{1 - 2xy}{2x + y}$.

Svar:

1. a. $5x - 2y - z = 1$. b. $2x - 3y - z + 7 = 0$.

2. a. $f''_{xx} = \dfrac{2y}{x^3}$, $f''_{yy} = 2x$, $f''_{xy} = f''_{yx} = 2y - \dfrac{1}{x^2}$.

   b. $f''_{xx} = \dfrac{2y}{(x - 2y)^3}$, $f''_{yy} = \dfrac{4x}{(x - 2y)^3}$, $f''_{xy} = \dfrac{x + 2y}{(2y - x)^3}$

   c. $f''_{xx} = -\dfrac{y^2}{(xy - 1)^2}$, $f''_{yy} = -\dfrac{x^2}{(xy - 1)^2}$, $f''_{xy} = -\dfrac{1}{(xy - 1)^2}$

   d. $f''_{xx} = \dfrac{16x}{(4x^2 + 1)^2}$, $f''_{yy} = \dfrac{2y}{(y^2 + 1)^2}$, $f''_{xy} = f''_{yx} = 0$

Dagens 15/2

1. Bestäm ekvationen till tangentplanet och normalen till ytan
   a. $z = x^2 - 4y^2$ i punkten $(5,2,9)$.
   b. $z = x + y + 3\arctan\dfrac{y - 2x}{x + y}$ i punkten $(1,2,3)$.

2. Bestäm alla punkter på ytan $z = x^2 + 4y^2$ i vilka tangentplanet är parallellt med planet $x + y + z = 0$.

3. Bestäm en linjär approximation till funktionen $f(x,y) = x^2 + y\sin(1 - \sqrt{1 - 2x + 4y})$ i en omgivning till punkten $(2,1)$ och beräkna ett approximativt värde av $f(2.1, 1.2)$.

4. Bestäm alla funktioner $f(x,y)$ sådana att
   a. $f'_x = 2x\sin x^2,\ f'_y = \cos y$.
   b. $f'_x = y,\ f'_y = x + 2y$.

5. Låt $z = xy + f\left(\dfrac{x}{y}\right)$. Bestäm $x^2 z''_{xx} + 2xy\, z''_{xy} + y^2 z''_{yy}$.

Svar:

1. a. Tangentplan: $10x - 16y - z = 9$. Normal: $(5,2,9) + t(10,-16,-1)$.
   b. Tangentplan: $x - 2y + z = 0$. Normal: $(1,2,3) + t(1,-2,1)$.
2. $(-1/2, -1/8, 5/16)$.
3. $L(x,y) = 5x - 2y - 4$ och $f(2.1, 1.2) \approx 4{,}1$.
4. a. $f(x,y) = \sin y - \cos x^2 + C$. b. $f(x,y) = xy^2 + y$.
5. $2xy$.

Dagens 16/2

1. Bestäm ekvationen för tangentplanet till ytan
   a. $x^3 + 2y^3 + 3z^3 + xyz = 7$ i punkten $(2,-1,1)$.
   b. $xy^3 + \frac{9y}{z} - x^3z^2 = 5$ i punkten $(1,2,3)$.
   c. $\frac{z}{x - y^2} + \ln(z - xy) = 3$ i punkten $(2,1,3)$.

2. I vilken punkt är planet $2x + y - 3z = 8$ tangentplan till ellipsoiden $x^2 + y^2 + 3z^2 = 8$?

3. Låt $f(x,y)$ vara en differentierbar funktion. Genom substitutionen
$$x = 2u + 3v,\ y = 4u - 6v$$
får vi en ny funktion $z = f(2u + 3v, 4u - 6v)$ av variabler u och v. Bestäm $3\,z'_u - 2\,z'_v$.
Tips: Enligt kedjeregeln har vi $z'_u = f'_x \cdot x'_u + f'_y \cdot y'_u = 2\,f'_x + 4\,f'_y$.

4. Låt $f(x,y)$ vara en differentierbar funktion. Genom substitutionen
$$x = 2u + 3v,\ y = \frac{u}{v}$$
får vi en ny funktion $z = f\left(2u + 3v, \frac{u}{v}\right)$ av variabler u och v. Bestäm $u\,z'_u + v\,z'_v$.
Tips: Enligt kedjeregeln har vi $z'_u = f'_x \cdot x'_u + f'_y \cdot y'_u = 2\,f'_x + \frac{1}{v}\,f'_y$.

Svar:

1. a. $11x + 8y + 7z = 21$. b. $19x - 15y + 8z = 13$.
   c. $2x - 2y - z + 1 = 0$.
2. $(2,1,-1)$.
3. $24\,f'_y$.
4. $x\,f'_x$