Dagens 20/2

1. Beräkna riktningsderivatan till funktionen $f(x,y) = \frac{y}{x} + xy^2$ i punkten $(1,2)$ i riktning av vektorn $\boldsymbol{v} = (3,4)$.

2. Beräkna riktningsderivatan till funktionen $f(x,y,z) = x \arctan \frac{y}{z}$ i punkten $(5,2,-1)$ i riktning av vektorn $(0,-3,4)$.

3. I vilken riktning bör punkten (x,y) röra sig utgående från $(1,2)$ för att värdet av $xy - 5\ln(x + y^2)$ skall växa så snabbt som möjligt?

4. Låt $f(x,y)$ vara en differentierbar funktion. Genom substitutionen $x = uv$, $y = \frac{u}{v}$ får vi en ny funktion $z = f\left(uv, \frac{u}{v}\right)$ av variabler u och v. Bestäm $u z'_u + v z'_v$.

   Tips: Enligt kedjeregeln har vi $z'_u = f'_x \cdot x'_u + f'_y \cdot y'_u = v f'_x + \frac{1}{v} f'_y$.

5. a. Beräkna riktningsderivatan $f'_{\boldsymbol{v}}$ till funktionen $f(x,y) = \frac{x + 6y}{x + y}$ i punkten $(1,0)$ i riktning av vektorn $\boldsymbol{v} = (4,3)$.

   b. Finns det någon vektor $\boldsymbol{u}$ sådan att $f'_{\boldsymbol{u}}(1,0) = 6$?

Svar:

1. 26/5.
2. –1.
3. (1,–3).
4. $2x f'_x$
5. a. $f'_{\boldsymbol{v}}(1,0) = 3$. b. Nej.

Dagens 21/2

I uppgifterna 1–5 förutsätter vi att funktionen f har kontinuerliga derivator av första och andra ordningen.

1. Funktionen $z(u,v)$ definieras genom $z(u,v) = f(x,y)$ där $x = u + v$ och $y = uv$. Verifiera att
   a. $u\, z'_u + v\, z'_v = x\, f'_x + 2y\, f'_y$.
   b. $z''_{uv} = f''_{xx} + y f''_{yy} + x f''_{xy} + f'_y$.

2. Bestäm z''_{uv} då $z = f(x,y)$, $x = u^2 + v^2$ och $y = uv$. Svaret får inte innehålla variabler u och v.

3. Bestäm $z''_{uu} + z''_{vv}$ då $z = f(x,y)$, $x = u^2 + v^2$ och $y = u - v$. Svaret får inte innehålla variabler u och v.

4. Bestäm $z''_{uu} + z''_{vv}$ då $z = f(x,y)$, $x = u^2 + v^2$ och $y = u^2 - v^2$. Svaret får inte innehålla variabler u och v.

5. En funktion $z(x,y)$ uppfyller ekvationen $z''_{xx} - z''_{yy} = 0$. Hur förändras denna ekvation om man ersätter funktionen z med funktionen f enligt $z = f(u,v)$, $u = x - y$, $v = x + y$?

Svar:

2. $4y f''_{xx} + y f''_{yy} + 2x f''_{xy} + f'_y$.
3. $4x f''_{xx} + 2 f''_{yy} + 4y f''_{xy} + 4 f'_x$.
4. $4x f''_{xx} + 4x f''_{yy} + 8y f''_{xy} + 4 f'_x$.
5. $f''_{uv} = 0$ (man kan förkorta med 4).

Dagens 22/2

1. Vi förutsätter att funktionen $f(u,v)$ har kontinuerliga partiella derivator av den ordning man behagar. Sätt $z = f(2x + 3y, xy)$. Bestäm

   a. $xz'_x + yz'_y$. Svaret får inte innehålla variabler x och y.

   b. z''_{xy}. Svaret får inte innehålla variabler x och y.

2. Bestäm konstanten a så att funktionen $z = (3x - 2y)f(x + ay)$ satisfierar ekvationen $2z'_x + 3z'_y = 0$, då f är en godtycklig, deriverbar funktion av en variabel.

3. Transformera ekvationen $\frac{1}{x} \cdot \frac{\partial f}{\partial x} - \frac{1}{y} \cdot \frac{\partial f}{\partial y} = 0$ genom $u = \ln(x^2 + y^2)$, $v = \ln(x^2 - y^2)$.

4. Transformera uttrycket $z''_{xx} - 2xz''_{xy} + x^2 z''_{yy}$ genom $x = u$, $y = v - \frac{u^2}{2}$.

5. En differentierbar funktion $f(x,y)$ har gradientvektorn $\operatorname{grad} f = (x + 2y, 2x - 4y)$. En ny funktion g definieras av $g(u,v) = f(x,y)$, där $x = u + v$ och $y = u + 2v$. Bestäm gradientvektorn av g.

Svar:

1. a. $uf'_u + 2vf'_v$. b. $6f''_{uu} + uf''_{uv} + vf''_{vv} + f'_v$.
2. $a = -2/3$.
3. $f'_v = 0$.
4. $z''_{uu} + z'_v$.
5. $\operatorname{grad} g = (u - v, -u - 7v)$.

Dagens 23/2

1. Bestäm $\mathbf{J}_f$, $\dfrac{d\boldsymbol{f}}{dx}$, $\dfrac{d\boldsymbol{f}}{d(y,z)}$ då $\boldsymbol{f}(x,y,z) = (xyz,\ x^2 + y^2 + z^2,\ x + 2y + 3z)$.

2. Bestäm Jacobimatriserna till följande funktioner:
   a. $\boldsymbol{f}(x,y) = (xy,\ x^2y^3,\ x + 2y)$
   b. $\boldsymbol{f}(x,y,z) = (xy + z^2,\ x^2y^3z^4)$.

3. Beräkna $\mathbf{J}_{\boldsymbol{g}\circ\boldsymbol{f}}$, $\dfrac{d\boldsymbol{f}}{du}$ och $\dfrac{d\boldsymbol{f}}{d(u,v)}$ i origo, då $\boldsymbol{f}: \begin{cases} x = 2u - 3v \\ y = 3u + 2v \\ z = 4uv + 1 \end{cases}$ och $\boldsymbol{g}: \begin{cases} r = xy \\ s = yz \\ t = xz \end{cases}$.

4. Visa att ekvationen $x^y + \sin y = 1$ definierar y som funktion av x i en omgivning av punkten $(1,0)$ och beräkna $y'(1)$.

5. Låt $\boldsymbol{r}(t) = (t \ln t,\ \sin 2t \cot t)$. Beräkna $\lim\limits_{t\to 0^+} \boldsymbol{r}(t)$ och $\boldsymbol{r}'(t)$.

6. En partikel rör sig längs kurvan $\boldsymbol{r}(t) = (t^2,\ 2t - t^2,\ 4t + 1)$. Bestäm partikelns hastighet, fart och accelerationen vid tiden $t = 2$.

Svar:

1. $\mathbf{J}_f = \begin{pmatrix} yz & xz & xy \\ 2x & 2y & 2z \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$, $\dfrac{d\boldsymbol{f}}{dx} = \begin{pmatrix} yz \\ 2x \\ 1 \end{pmatrix}$, $\dfrac{d\boldsymbol{f}}{d(y,z)} = \begin{pmatrix} xz & xy \\ 2y & 2z \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$

2. a. $\begin{pmatrix} y & x \\ 2xy^3 & 3x^2y^2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ b. $\begin{pmatrix} y & x & 2z \\ 2xy^3z^4 & 3x^2y^2z^4 & 4x^2y^3z^3 \end{pmatrix}$

3. $\mathbf{J}_{\boldsymbol{g}\circ\boldsymbol{f}} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 3 & 2 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}$, $\dfrac{d\boldsymbol{f}}{du} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\dfrac{d\boldsymbol{f}}{d(u,v)} = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 3 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

4. 0.

5. $(0,2)$ och $(1 + \ln t,\ -2 \sin 2t)$.

6. Hastighet $\boldsymbol{v} = (4, -2, 4)$. Fart $v = 6$. Acceleration $\boldsymbol{a} = (2, -2, 0)$.