Dagens 27/2

1. Visa att ekvationen $xy^2 + e^{2x-y} = 5$ definierar i en omgivning av punkten $(1,2)$ precis en funktion $y = y(x)$ sådan att $y(1) = 2$. Beräkna $y'(1)$.

2. Visa att ekvationen $x \ln(1 + y^2) + \sin(xy + y) = 0$ definierar i en omgivning av punkten $(0,0)$ precis en funktion $y = y(x)$ sådan att $y(0) = 0$. Beräkna $y'(0)$.

3. Visa att det i en omgivning av punkten $(1,1,1)$ finns precis en funktion $z = z(x,y)$ som uppfyller ekvationen $x^3 + y^3 + z^3 + x^2z - yz - z = 2$ och sådan att $z(1,1) = 1$. Bestäm för denna funktion:
   a. $z'_x(1,1)$ och $z'_y(1,1)$
   b. grad $z(1,1)$
   c. riktningsderivatan i punkten $(1,1)$ i riktning av vektorn $\boldsymbol{v} = (2,-6)$.

4. Visa att funktionen $\boldsymbol{f}(x,y) = \begin{cases} u = 2x + \sin y \\ v = \sin x + y + 1 \end{cases}$ är lokalt inverterbar. Beräkna, i punkten $(u,v) = (0,1)$, de partiella derivatorna $\dfrac{\partial x}{\partial u}$ och $\dfrac{\partial y}{\partial v}$ samt inversens Jacobimatris.

5. Visa at ekvationssystemet $\begin{cases} xy^2 + yz^2 + zx^2 = 4 \\ x^3 + y^3 + z^3 = 9 \end{cases}$ definierar i en omgivning av punkten $(0,1,2)$ precis två kontinuerligt deriverbara funktioner $y = y(x)$ och $z = z(x)$ sådana att $y(0) = 1$ och $z(0) = 2$.

Svar:

1. $y'(1) = -2$.
2. $y'(0) = 0$.
3. a. $z'_x(1,1) = -5/2$, $z'_y(1,1) = -1$.
   b. grad $z(1,1) = (-5/2, -1)$.
   c. $\sqrt{10}/20$.
4. $\dfrac{\partial x}{\partial u} = 1$, $\dfrac{\partial y}{\partial v} = 2$, $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$.

Dagens 28/2

1. Bestäm eventuella lokala extrempunkter (och deras karaktär) till följande funktioner:
   a. $f(x,y) = 2xy^2 + x^2 + 4y$
   b. $f(x,y) = 2x + y + 3\sqrt{1 + x^2 + y^2}$
   c. $f(x,y) = x^3 - 3xy + y^3$.

2. Låt $f(x,y) = e^{xy} \cos 2x$. Beräkna $\dfrac{\partial^{21} f(0,0)}{\partial^{17}x \partial^4 y}$.

3. Bestäm Taylorpolynomet av andra graden till följande funktioner:
   a. $f(x,y) = 2 \ln(x - 2y) + e^{2x - 6y}$ kring punkten $(3,1)$.
   b. $f(x,y) = e^{x - 1} \cos(x - y)$ kring punkten $(1,1)$.

4. Bestäm Taylorpolynomet av andra graden till funktionen
$$f(x,y) = 8\sqrt{x} + 2\cos(2x - y)$$
kring punkten (1,2). Använd detta polynom för att beräkna ett approximativt värde av $f(1.1, 2.2)$.

Svar:

1. a. Det finns inga lokala extrempunkter. Det finns en sadelpunkt $(-1,1)$.
   b. Lokalt minimum i $(-1,-1/2)$.
   c. Lokalt minimum i $(1,1)$. (sadel i $(0,0)$.)

2. 0.
3. a. $-1 + 4x - 10y + (x - 3)^2 - 8(x - 3)(y - 1) + 14(y - 1)^2$
   b. $x + (x - 1)(y - 1) - \dfrac{1}{2}(y - 1)^2$.
4. $p(h,k) = 10 + 4h - 5h^2 + 4hk - k^2$, där $h = x - 1$ och $k = y - 2$; $f(1.1, 2.2) \approx 10{,}39$.

Dagens 1/3

1. Bestäm eventuella lokala extrempunkter (och deras karaktär) till följande funktioner:
   a. $f(x,y) = 3x^3 - 9x + 3y - y^3$
   b. $f(x,y) = x^2 + 2xy - y^3$

2. För vilka värden på konstanten a har funktionen $f(x,y) = a(x+a)^2 + y^2 - 2y - \cos(x-y)$ ett lokalt extremvärde i punkten $(1,1)$. Bestäm även punktens karaktär för dessa a.

3. Är det sant att $2x + (x-y)^2 + \ln(2-x^2) \geq 2$ om (x,y) ligger tillräckligt nära punkten $(1,1)$?

4. Visa att ekvationen $z^3 - 2xz + y = 0$ definierar i en omgivning av punkten $(1,1,1)$ precis en funktion $z = z(x,y)$ sådan att $z(1,1) = 1$.
   Bestäm Taylorpolynomet av andra graden till z kring punkten $(1,1)$.

5. Visa att det i en omgivning av punkten $(7,7)$ finns precis två kontinuerligt deriverbara funktioner $z = z(x,y)$ och $w = w(x,y)$ sådana $z(7,7) = 1$, $w(7,7) = 2$ och
   $$\begin{cases} z^2 + 3w = x \\ 3z + w^2 = y \end{cases}.$$
   Bestäm Taylorpolynomet av första graden till funktionen z kring punkten $(7,7)$. Bestäm ekvationen till tangentplanet till grafen till funktionen z i punkten $(7,7,1)$.

Svar:

1. a. Lokalt min i $(1,-1)$, lokalt maximum i $(-1,1)$. (sadel i $(1,1)$ och $(-1,-1)$.)
   b. Lokalt minimum i $(2/3,-2/3)$. (sadel i $(0,0)$.)
2. Endast för $a = 0$. För $a = 0$ är $(1,1)$ en lokal minimipunkt.
3. Nej.
4. $1 + 2(x-1) - (y-1) - 8(x-1)^2 + 10(x-1)(y-1) - 3(y-1)^2$.
5. Taylorpolynomet: $8 - 4x + 3y$. Tangentplanet: $z = 8 - 4x + 3y$.

Dagens 2/3

1. Bestäm eventuella lokala extrempunkter (och deras karaktär) till följande funktioner:

   a. $f(x,y) = 2x^3 - 3x^2 - y^2$.

   b. $f(x,y) = \dfrac{y}{x} + x + \dfrac{1}{y}$.

   c. $f(x,y) = xy\, e^{-(x^2 + y^2)/2}$.

   d. $f(x,y) = \dfrac{x}{y} + \dfrac{8}{x} - y$.

2. Är det sant att $4x^2 + 3y^2 + 2\cos(x + y) \geq 2$ om (x,y) ligger tillräckligt nära origo?

3. Verifiera att funktionen $f(x,y) = (1 + y)^3x^2 + y^2$ endast har en kritisk punkt och att f antar i denna ett lokalt minimivärde. Är detta värde funktionens minsta värde?

4. Bestäm eventuella lokala extremvärden till följande funktioner:

   a. $f(x,y,z) = x^4 + 2y^2 + (z - 1)^2 - 4x$.

   b. $f(x,y,z) = x^4 + 2x^2 - 2y^2 + (z - 1)^2$.

Svar:

1. a. Lok. max. 0 i $(0,0)$. b. Lok. min. 3 i $(1,1)$.
   c. Lok. max. i $\pm(1,1)$, lok. min. i $\pm(1,-1)$. d. Lok. max. i $(-4,2)$.
2. Ja.
3. Lokal minimum i $(0,0)$. $f(0,0)$ är inte funktionens minsta värde då t.ex $f(0,0) > f(3,-2)$. (Jämför detta med funktioner av en variabel: Om $f(x)$ endast har en kritisk punkt och om f antar i denna ett lokalt minimivärde så är detta värde funktionens minsta värde.)
4. a. Lok. min. -3 i $(1,0,1)$. b. Inga extrempunkter.