Dagens 20/4

1. Beräkna linjeintegralen $\int_\Gamma (x^2 + y^2)dx + (x^2 - y^2)dy$ i positiv led runt kvadraten med hörnen i punkterna $(\pm 1, \pm 1)$.

2. Beräkna linjeintegralen $\int_\Gamma (e^x \cos x + 3y)dx + (2xy + \arctan y^2)dy$ tagen i positiv led längs randen till området $x^2 - 3 \le y \le \dfrac{x^2}{4}$.

3. Beräkna linjeintegralen $\int_\Gamma (3x^2y^3 + x^2 + x)dx + (3x^3y^2 + 2x)dy$
   a. i positiv led längs cirkeln $x^2 + y^2 = 1$.
   b. från $(1,0)$ till $(-1,0)$ längs halvcirkeln $x^2 + y^2 = 1$, $y \ge 0$.
   c. från $(1,0)$ till $(0,1)$ längs kvartscirkeln $x^2 + y^2 = 1$, $x \ge 0$, $y \ge 0$.

4. Beräkna linjeintegralen $\int_\Gamma x^2\,dx + y^2\,dy$, då Γ går från $(1,0)$ till $(-1,0)$ längs kurvan $x^4 + y^4 = 1$, $y \ge 0$.

5. Beräkna linjeintegralen $\int_\Gamma -2y\,dx + x\sqrt{3 + x^2 + y^2}\,dy$ tagen i positiv led längs randen till området $x^2 + y^2 \le 1$, $x \ge 0$, $y \ge 0$.

6. Beräkna linjeintegralen $\int_\Gamma (1 + y^2)dx + (x + 2xy)dy$, tagen i positiv led längs kurvan $|x| + |y| = 1$.

Svar:

1. 0.
2. –40.
3. a. 2π. b. $\pi - 2/3$. c. $\pi/2 - 5/6$.
4. –2/3.
5. π.
6. 2.

Dagens 21/4

1. Beräkna linjeintegralen $\int_\Gamma (9x^8y^7 + x)\mathrm{d}x + 7x^9y^6\mathrm{d}y$, då Γ går från $(1,0)$ till $(0,1)$ längs linjen $x + y = 1$.

2. Beräkna linjeintegralen $\int_\Gamma (4x - 2y)\mathrm{d}x + (2x + 3y)\mathrm{d}y$

   a. i positiv led längs ellipsen $4x^2 + 9y^2 = 36$.

   b. från $(3,0)$ till $(0,2)$ längs ellipsbågen $4x^2 + 9y^2 = 36$, $x \geq 0$, $y \geq 0$.

3. Undersök om vektorfältet $\boldsymbol{F}$ är konservativt. Om så är fallet bestäm en potential till $\boldsymbol{F}$.

   a. $\boldsymbol{F} = (y^3 + 3x^2y^2, 3xy^2 + 2x^3y)$.

   b. $\boldsymbol{F} = (3x^2y + y^2, x^3 + 2xy + x)$.

4. Bestäm konstanten a så att vektorfältet $\boldsymbol{F} = (2x + ay + y^2, 4x + 8y + 2xy)$ får en potential.

5. Visa att vektorfältet $\boldsymbol{F} = (9y(x + y)^8, 1 + (x + 10y)(x + y)^8)$ har en potential. Beräkna linjeintegralen $\int_\Gamma \boldsymbol{F}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{r}$ längs linjen $x + 2y = 3$ från punkten $(-3,3)$ till punkten $(-1,2)$.

6. Beräkna linjeintegralen $\int_\Gamma (5x^4y + y^6)\mathrm{d}x + (x^5 + 6xy^5 + 2y)\mathrm{d}y$, då Γ går från punkten $(1,1)$ till punkten $(0,2)$ längs linjen $x + y = 2$.

Svar:

1. $-1/2$.
2. a. 24π. b. $6\pi - 12$.
3. a. Konservativt. Potential $U = xy^3 + x^3y^2$. b. Ej konservativt.
4. $a = 4$.
5. 1.
6. 1.

Dagens 24/4

1. Beräkna flödesintegralen $\iint_{\mathbf{S}} \boldsymbol{F} \cdot \hat{\boldsymbol{n}}\, \mathrm{d}S$, där $\mathbf{S}$ är ytan $z = x^2 + xy + y^2,\ 0 \le y \le x,\ 0 \le x \le 1$. $\boldsymbol{F} = (y, x, z)$ och $\hat{\boldsymbol{n}}$ har positiv z–komponent.

2. Beräkna flödesintegralen $\iint_{\mathbf{S}} \boldsymbol{F} \cdot \hat{\boldsymbol{n}}\, \mathrm{d}S$, där $\mathbf{S}$ är den del av paraboloiden $z = 1 - x^2 - y^2$ som ligger ovanför xy–planet, $\hat{\boldsymbol{n}}$ är den uppåtriktade normalen och $\boldsymbol{F} = (y, -x, z)$.

3. Beräkna flödet av fältet $\boldsymbol{F} = (x,y,z)$ genom ytan $z = 1 + 2x + 3y$, där $0 \le x \le 2$, $0 \le y \le x$. Enhetsnormalen till ytan har positiv z–komponent.

4. Beräkna flödesintegralen $\iint_{\mathbf{S}} \boldsymbol{F} \cdot \hat{\boldsymbol{n}}\, \mathrm{d}S$, där $\mathbf{S}$ är den del av ytan $z = xy + x^2$ som ligger inom cylindern $x^2 + y^2 = 1$, $\hat{\boldsymbol{n}}$ är den uppåtriktade normalen och $\boldsymbol{F} = (2y, -x, z)$.

5. Beräkna flödet av fältet $\boldsymbol{F} = (x,0,0)$ ut ur halvklotet $x^2 + y^2 + z^2 \le 1$, $z \ge 0$.

Svar:

1. $-3/8$.
2. $\pi/2$.
3. 2.
4. 0.
5. $2\pi/3$.