Dagens 4/5

1. Beräkna flödesintegralen $\iint_{\mathbf{S}} \boldsymbol{F} \cdot \hat{\boldsymbol{n}}\, \mathrm{d}S$, där

   a. $\boldsymbol{F} = (z, y, x)$ och $\mathbf{S}$ är den del av planet $x + y + z = 2$ där $x \geq 0$, $y \geq 0$ och $z \geq 0$. Enhetsnormalen $\hat{\boldsymbol{n}}$ har positiva komponenter.

   b. $\boldsymbol{F} = (18z, -12, 3y)$ och $\mathbf{S}$ är den del av planet $2x + 3y + 6z = 12$ som uppfyller villkoren $x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0$. $\hat{\boldsymbol{n}}$ är den uppåtriktade normalen till $\mathbf{S}$.

   c. $\boldsymbol{F} = (x, y, 2y + 2z)$ och $\mathbf{S}$ är den del av ytan $z = xy$ som projiceras på kvadraten $0 \leq x \leq 1$, $0 \leq y \leq 1$. Enhetsnormalen $\hat{\boldsymbol{n}}$ har positiv z–komponent.

   d. $\boldsymbol{F} = \operatorname{grad} \dfrac{1}{r}$, $r = \sqrt{x^2 + y^2 + y^2}$, $\mathbf{S}$ är den del av sfären $x^2 + y^2 + z^2 = 25$ som ligger ovanför planet $z = 4$ och $\hat{\boldsymbol{n}}$ är den normal till $\mathbf{S}$ som bildar spetsig vinkel med positiva z–axeln.

   e. $\boldsymbol{F} = (x, y, z)$ ut genom sfären med medelpunkt i origo och radien 2.

   f. $\boldsymbol{F} = (4xz, -y^2, yz)$ ut ur kuben begränsad av planen $x = 0, x = 1, y = 0$, $y = 1$, $z = 0$ och $z = 1$.

Svar:

1. a. 4   b. 24   c. 1.

   d. $-\dfrac{2\pi}{5}$ e. 32π.   f. 3/2.

Dagens 5/5

1. Beräkna flödesintegralen $\iint_{\mathbf{S}} \boldsymbol{F} \cdot \hat{\boldsymbol{n}}\, \mathrm{d}S$, där $\mathbf{S}$ är den del av cylindern $z = 1 + x^2$ som ligger inom paraboloiden $z = 2x^2 + y^2$, $\boldsymbol{F} = (-x, z, 2y^2)$ och $\hat{\boldsymbol{n}}$ har positiv z–komponent.

2. Beräkna flödet av vektorfältet $\boldsymbol{F} = \boldsymbol{r} \cdot |\boldsymbol{r}|^{-2}$, där $\boldsymbol{r} = (x, y, z)$, ut ur området $9 \le x^2 + y^2 + z^2 \le 36$.

3. Beräkna flödet av vektorfältet $\boldsymbol{F} = (yz, -xz, yz)$ genom den del av sfärytan $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ som ligger inom cylindern $x^2 + z^2 = 1$ och på vilken $y \ge 0$. Ytans normalvektorn är riktad ut ur sfären.

4. Beräkna flödet av vektorfältet $\boldsymbol{F}$, där
   a. $\boldsymbol{F} = (x^2 + y^2, xz, y^2 - z^2)$ ut ur den slutna ytan som begränsar kroppen $x \ge 0$, $y \ge 0$, $z \ge 0$, $z \le 1$, $2x + y \le 2$.
   b. $\boldsymbol{F} = (x^3y, xz, yz^3)$ ut ur området $x^2 + z^2 \le 1$, $0 \le y \le 1$, $x \ge 0$, $z \ge 0$.

Svar:

1. π.
2. 12π.
3. $\dfrac{\pi}{4}$
4. a. $-1/3$. b. $\dfrac{3\pi}{16}$.

Dagens 8/5

1. Undersök om vektorfältet $\boldsymbol{F}$ är konservativt. Om så är fallet bestäm en potential till $\boldsymbol{F}$.
   a. $\boldsymbol{F} = (3x^2y + y^2 + y, x^3 + 2xy + x, 2z)$
   b. $\boldsymbol{F} = (3x^2y + y^2 + y, x^3 + 2xyz + x, 2z)$.

2. Betrakta vektorfältet $\boldsymbol{F} = (2x\mathrm{e}^{-y}, -\cos z - x^2\mathrm{e}^{-y}, y \sin z)$. Visa att $\boldsymbol{F}$ har en potential. Bestäm den potential som har värdet 3 i punkten $(1,0,\pi)$.

3. Visa att vektorfältet $\boldsymbol{F} = (2xy, x^2 + 2yz, y^2 - 2z)$ har en potential och bestäm denna. Beräkna därefter linjeintegralen $\int_\Gamma \boldsymbol{F} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r}$ då Γ är kurvan $(x,y,z) = (\cos t, \sin t, t)$ från $(1,0,0)$ till $(-1,0,\pi)$.

4. Bestäm konstanten a så att vektorfältet $\boldsymbol{F} = (y + 2z, x + 2z, ax + 2y)$ får en potential U och bestäm denna. Beräkna därefter linjeintegralen $\int_\Gamma \operatorname{grad} U \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r}$, tagen längs skruvlinjen $\boldsymbol{r} = (\cos t, \sin t, 3t)$ från $(1,0,0)$ till $(1,0,6\pi)$.

5. Låt $\boldsymbol{r} = (x,y,z)$ och $r = |\boldsymbol{r}|$. Beräkna de av följande uttryck som har mening:
   a. $\operatorname{div}(r \operatorname{grad} r^3)$
   b. $\operatorname{rot}(\boldsymbol{r} \cdot \operatorname{grad} r^3)$
   c. $\operatorname{grad}(\boldsymbol{r} \cdot \operatorname{grad} r^3)$.

Svar:

1. a. Konservativt. Potential $U = x^3y + xy^2 + xy + z^2$.
   b. Ej konservativt.
2. $U = x^2\mathrm{e}^{-y} - y \cos z + 2$.
3. $U = x^2y + y^2z - z^2 + C$; $-\pi^2$.
4. $a = 2$. Potentialen $U = xy + 2yz + 2xz + C$. Integralen $= 12\pi$.
5. a. $15r^2$.
   b. Har ingen mening.
   c. $9r\boldsymbol{r}$.