INLÄMNINGSUPPGIFT2 AMELIA II FÖR IT-PROGRAMMET VT 06.

HÅKAN CARLQVIST

Inlämningsuppgiften lämnas in i samband med föreläsningen 17/3 8.00-10.00. Inlämning efter detta klockslag accepteras ej. Tänk på att inlämningsuppgiften är att betrakta som enskilt arbete och att inget samarbete får förekomma. Tänk på att ni kan få stor hjälp av den teori som gåtts igenom på föreläsningarna och av de uppgifter som lösts på lektionerna och föreläsningarna och att liknande exempel kan finnas i kursböckerna. Lycka till!

Uppgift1 :
Visa att andragradsytan $2x^2+3y^2+2z^2+2xy+2yz+x-3y+2z=2$ representerar en ellipsoid samt bestäm halvaxlarnas längd, ellipsoidens mittpunkt, halvaxlarnas riktningar samt ellipsoidens volym.

Uppgift2 :
Låt f vara en funktion $f:\mathbb{R}^2\setminus\{a,b\}\longrightarrow D\subset\mathbb{R}$ där a,b är punkter i $\mathbb{R}^2$.
i) Beskriv en metod för att visa att ett gränsvärde $\lim_{x\to a} f(x)$ existerar.
ii) Beskriv en metod för att visa att ett gränsvärde $\lim_{x\to b} f(x)$ inte existerar.
iii) Varför fungerar inte metoden i ii) fr gränsvarden i i)?
$iiii$) Bestäm om det existerar gränsvärdet

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{x^3-x^2y}{x^2+y^2+xy}$$

$iiiii$) Bestäm om det existerar gränsvärdet

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{x^2+2y^2}{2x^2+y^2}$$

Uppgift3 :
I flervariabelanalys inför man begreppet differentierbarhet. Varför räcker det inte med att anta att en funktion av flera variabler är partiellt deriverbar med avseende på dess variabler, för att ha en motsvarighet till begreppet deriverbarhet för funktioner av en variabel?

Uppgift4 :
Bestäm alla punkter på funktionsytan $z=x^2+4y^2$ i vilka tangentplanet är parallellt med planet $x+y+z=0$.

Uppgift5 :
En $\mathcal{C}^1$-funktion $f(x,y)$ definierad i området $x>0, y>0$ satisfierar

$$x\frac{\partial f}{\partial x}=y\frac{\partial f}{\partial y}$$

Visa att f är konstant på alla hyperbelgrenar $xy=c$ (där c är en reell konstant) i första kvadranten.

Uppgift6 :
Bestäm den lösning $f(x, y)$ till differentialekvationen

$$2\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} = 0$$

som uppfyller villkoret $f(x, 0) = \sin x$.
Ledning: Använd dig av substitutionen

$$\begin{cases} u = x - ky \\ v = x + ky \end{cases}$$

och välj k på ett smart sätt.
Uppgift7 :
Beskriv geometriskt vad som menas med en gradient till en funktion exempelvis genom att studera en nivåkurva till en funktion $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$.
Bevisa att gradienten grad $f(a)$ ($f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$) pekar i den riktning i vilken funktionen f växer snabbast i punkten a och att den maximala tillväxthastigheten är $|\text{grad } f(a)\ |$.
Ledning: Ingen ledning för denna uppgift men du får sammarbeta med någon av dina kurskamrater. Lämna in namn på den person du samarbetar med.
Uppgift8 :
Med en potentialfunktion till kraftfältet $\mathbf{F} = (P(x, y, z), Q(x, y, z), R(x, y, z))$ menas en rellvärd funktion $U(x, y, z)$ sådan att

$$\text{grad} U(x, y, z) = \mathbf{F}$$

Visa att

$$U(x, y, z) = \frac{1}{r} = \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$$

är en potentialfunktion till

$$\mathbf{F} = -\frac{1}{r^3}\mathbf{r} \text{ där } \mathbf{r} = (x, y, z)$$