

MODELLTENTAMEN

5B1141, ANALYTISKA METODER OCH LINJÄR ALGEBRA II FÖR
IT-PROGRAMMET.

Uppgifterna 1-5 svarar mot varsin modul i den kontinuerliga examinationen. Av dessa uppgifter skall man enbart lösa dem som svarar mot de moduler man inte blivit godkänd på. Bedömning här är Godkänd/Uderkänd. Uppgifterna 6-10 poängsätts med maximalt 4 poäng per uppgift.

Betygsgränser:

För betyg A och 5: godkänt på modul 1-5 och 14-20 poäng på uppgifterna 6-10

För betyg B och 4: godkänt på modul 1-5 och 11-13 poäng på uppgifterna 6-10

För betyg C och 4: godkänt på modul 1-5 och 8-10 poäng på uppgifterna 6-10

För betyg D och 3: godkänt på modul 1-5 och 5-7 poäng på uppgifterna 6-10

För betyg E och 3: godkänt på modul 1-5 och 3-4 poäng på uppgifterna 6-10

Samtliga behandlade uppgifter skall förses med utförliga lösningar och motiveringar. Inga hjälpmedel är tillåtna. Skriv tydligt program på omslaget. Lycka till!!!

Uppgift1 :

Bestäm en överföringsmatris för en linjär avbildning $\mathcal{A} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ som avbildar en kvadrat med hörn i punkterna $(0,0)$, $(0,1)$, $(1,0)$ och $(1,1)$ på en månghörning med hörn i punkterna $(0,0)$, $(1,0)$, $(1,1)$ och $(2,1)$.

Uppgift2 :

Antag att du har en funktion $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ som har kontinuerliga partiella derivator i en punkt (x, y) . Hur stor är riktningsderivatan i en riktning jämfört med den maximala riktningsderivatan om vinkeln mellan dem är $\pi/3$.

Uppgift3 :

Visa att ekvationen $x^3y + 2y^3x = 3$ definieras av y som en funktion av x i en omgivning av punkten $(1,1)$. Bestäm derivatan av denna funktion i $x = 1$.

Uppgift4 :

Visa att den generaliserade dubbelintegralen

$$\iint_{\mathbb{R}^2} \frac{2x^2 + y^2}{1 + (2x^2 + y^2)^4} dx dy$$

är konvergent och bestäm dess värde.

Uppgift5 :

Beräkna flödet av fältet $F = (4xz, -2y^2, z^3)$ ut genom enhetssfären.

Uppgift6 :

Bestäm en lösning till differentialekvationen

$$y f'_x(x, y) - x f'_y(x, y) = x^3 y + x y^3, x > 0, y > 0$$

så att $f(x, x) = x^2$.

Ledning: Inför variablerna $u = x^2 + y^2$ och $v = x^2 - y^2$.

Uppgift7 :

Beräkna volymen av det begränsade området mellan paraboloiden $z = 2x^2 + 5y^2$ och konen $z^2 = 2x^2 + 5y^2$.

Uppgift8

En funktion $U : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ uppfyller Laplace differentialekvation ($(\Delta U = \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} = 0)$) i ett område $\Omega \subset \mathbb{R}^3$. Visa att U kan skrivas som en potentialfunktion till ett källfritt fält $F : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ på Ω .

Uppgift9

Tangentplanet till ellipsoiden $x^2 + 2y^2 + 3z^2 = 1$ i en punkt P avgränsar tillsammans med de tre koordinatplanen en tetraeder. Bestäm den minsta volym denna tetraeder kan anta.

Uppgift10

Låt A vara en $n \times m$ matris. Visa att $A^T A$ har n stycken orthonormala egenvektorer.

Svar:

1: $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

2:

3: $y'(1) = -5/7$

4: $\pi^2 \sqrt{2}/8$

5: $4\pi/5$

6: $f(x, y) = (x^4 - y^4)/4 + (x^2 + y^2)/2$

7: $\pi\sqrt{10}/60$

8:

9: $\sqrt{2}/4$

10: