

KTH Matematik

TENTAMENSSKRIVNING MÅNDAGEN 21/8 8.00-13.00

5B1141, ANALYTISKA METODER OCH LINJÄR ALGEBRA II FÖR ÖPPEN
INGÅNG OCH IT-PROGRAMMET.

Uppgifterna 1-5 svarar mot varsin modul i den kontinuerliga examinationen. Av dessa uppgifter skall man enbart lösa dem som svarar mot de moduler man inte blivit godkänd på. Bedömning här är Godkänd/Underkänd. Uppgifterna 6-10 poängsätts med maximalt 4 poäng per uppgift. Observera att resultat erhållet på tentamen 30/5 EJ kan tillgodoräknas. Enbart moduler godkända på kontinuerlig examination vårterminen 2006 kan tillgodoräknas.

Betygsgränser:

För betyg A och 5: godkänt på modul 1-5 och 14-20 poäng på uppgifterna 6-10

För betyg B och 4: godkänt på modul 1-5 och 11-13 poäng på uppgifterna 6-10

För betyg C och 4: godkänt på modul 1-5 och 8-10 poäng på uppgifterna 6-10

För betyg D och 3: godkänt på modul 1-5 och 5-7 poäng på uppgifterna 6-10

För betyg E och 3: godkänt på modul 1-5 och 3-4 poäng på uppgifterna 6-10

Samtliga behandlade uppgifter skall förses med utförliga lösningar och motiveringar.

Inga hjälpmedel är tillåtna. Skriv tydligt program på omslaget. Lycka till!!!

1. För en linjär avbildning $A : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ gäller att

$$A \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 9 \end{pmatrix} \text{ och } A^{-1} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -7 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Beräkna $A \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix}$

Svar: $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

2. Antag att $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ har kontinuerliga partiella derivator.
Transformer uttrycket

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right)^2$$

genom övergång till polära koordinater

$$x = r \cos \phi,$$

$$y = r \sin \phi.$$

Svar: Se Person-Böijers s 73.

3. Bestäm de största och minsta värden som antas av funktionen

$$f(x, y) = x e^{-(x^2 + y^2)}$$

i området $x, y \geq 0$.

Svar: Största värde $1/\sqrt{2e}$, minsta värde 0.

4. Beräkna dubbelintegralen

$$\iint_D (x^3 \cos(y^2) + 3 \sin y) dx dy$$

där området D i xy -planet bestäms av $|x| + |y| \leq 2$.

Svar: 0

5. Beräkna kurvintegralen

$$\int_{\gamma} (3y^2 + 2xe^{y^2}) dx + (2x^2 ye^{y^2}) dy$$

där γ går ett varv i positiv riktning runt fyrhörningen med hörn i $(0,0)$, $(1,1)$, $(3,1)$, $(2,0)$.

Svar: -6

6. Låt v_1 och v_2 beteckna två vektorer i $\mathbb{R}^4$ där

$$\begin{aligned} v_1 &= (-4, -3, 8, 6) \text{ och} \\ v_2 &= (2, 1, -4, -3) \end{aligned}$$

Vilka vektorer ur standardbasen kan läggas till mängden $\{v_1, v_2\}$ för att ge en bas för $\mathbb{R}^4$?

Svar: Välj inte $(0,1,0,0)$.

7. Visa att ekvationerna

$$\begin{aligned} F(x, y, z) &= x^5 + xy + z^2 - 4 = 0 \text{ och} \\ G(x, y, z) &= x^2 - e^{yz} = 0 \end{aligned}$$

i en omgivning av punkten $(1,3,0)$ implicit definierar två funktioner $x = f(z)$ och $y = g(z)$. Beräkna $f'(0)$ och $g'(0)$.

Svar: $f'(0)=3/2$ och $g'(0)=-12$.

8. Genom vilken sluten yta i $\mathbb{R}^3$ har vektorfältet

$$F = (-3x^2 z^2 - 4xy^2, -y(x^2 + z^2), 4z + 2xz^3)$$

störst utflöde?

Svar: Ellipsoiden $x^2 + 4y^2 + z^2 = 4$.

9. Beräkna arean av den del av konen $z^2 = x^2 + y^2$ som ligger mellan xy -planet och planet $x = \sqrt{2}z - 2$.

Svar: 8π .

10. a) Bevisa att en ortogonalt diagonaliserbar matris är symmetrisk.

b) Bevisa att egenvektorer från olika egenrum till en symmetrisk matris är ortogonala.