KTH Matematik
Hans Thunberg

5B1142 Envariabelanalys och Linjär Algebra
HT 2005 för Öppen Ingång

Inlämningsuppgift modul 3

För att kunna få godkänt på denna inlämningsuppgift krävs att du lämnar skriftliga lösningar senast under föreläsningen måndag 28/11 (13.15 - 15.00) och att du muntligen kan redogöra för dina lösningar vid det redovisningstillfälle som du anvisas (se kurshemsidan för aktuella tider). Lösningarna kan inte kompletteras vid det muntliga tillfället.

Det går bra att lämna handskrivna lösningar, men de skall vara snyggt och prydligt utförda. Lösningarna skall vara fullständiga och skrivna så att de går att läsa som en löpande text av någon med förkunskaper motsvarande dina egna. Satser ur kurslitteraturen får användas, men du ska naturligtvis tala om vilka satser du använder. Att kopiera andras arbeten, eller lösningar ur andra läroböcker etc, är absolut inte tillåtet och betraktas som fusk.

Kom ihåg att skriva namn på alla blad du lämnar in.

---

(1) Visa att
$$\int_1^\infty \frac{1}{x^2}\,dx$$
är konvergent genom att beräkna $\lim_{A\to\infty} \int_1^A \frac{1}{x^2}\,dx$.

(2) Visa med hjälp av lämplig figur att
$$\int_2^\infty \frac{1}{x^2}\,dx < \sum_{n=2}^\infty \frac{1}{n^2} < \int_1^\infty \frac{1}{x^2}\,dx < \sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n^2}.$$

(3) Använd (1), den mittersta olikheten i (2) samt Sats 10 på sidan 174 i Persson och Böiers för att visa att $\sum_{n=2}^\infty \frac{1}{n^2}$ är konvergent.

Det följer då att $\sum_{n=k}^\infty \frac{1}{n^2}$ är konvergent för alla positiva heltal k. Varför då?

Kommentar. Resonemanget du nu har genomfört är precis beviset för Sats 2 sid 343 i Person och Böiers (*Cauchys integralkriterium*) utfört i ett specialfall. Att $\sum_{n=k}^\infty \frac{1}{n^2}$ är konvergent för alla positiva heltal k följer förstås direkt från (1) och *Cauchys integralkriterium*, men det är alltså inte så du ska lösa uppgift (3).

(4) Undersök, med hjälp av en räknare, partialsummorna till $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$. Kan du se vad serien konvergerar mot?

(5) Använd (2) för att visa att

$$\frac{3}{2} < \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} < 2.$$

Kommentar. Med hjälp av s k Fourierserier, som du får läsa om i senare kurser, kan man visa att

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6} = 1.64493406\ldots \qquad \text{(Ständigt detta } \pi \text{ !)}$$

(6) Använd nu resultet från (3) tillsammans med lämpliga satser för att visa att även följande två serier är konvergenta

$$\text{(a)} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 + n^4} \qquad \text{b)} \quad \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^2 - 1}$$

(7) (a) Bestäm MacLaurinutvecklingen till ordning n med restterm till

$$f(x) = \frac{1}{1-x}.$$

(b) Vilken blir Maclaurin-serien för f, och för vilka x konvergerar denna?

(c) Kan du härleda denna serieutveckling på något annat sätt?

(8) Beräkna gränsvärdet

$$\lim_{x \to 0} \frac{2x \sin x}{e^x - 1 - x}$$

genom att

(a) göra lämpliga Taylor-utvecklingar;

(b) använda l'Hospitals regel.