Lösningar till KS2B

1

$$\int \frac{1}{x^2+4x-5}\,dx = \int \frac{1}{(x+2)^2-9}\,dx = \int \frac{1}{((x+2)-3)((x+2)+3)}\,dx =$$

$$\int \frac{1}{(x-1)(x+5)}\,dx =$$

Partialbråksuppdelning:

$$\frac{1}{(x-1)(x+5)} = \frac{A}{x+5} + \frac{B}{x-1} \quad \Rightarrow \quad 1 = A(x-1) + B(x+5)$$

Termer med lika gradtal sätts lika

$$\begin{cases} A+B=0 & \Rightarrow A=-B \\ -A+5B=1 & \Rightarrow B+5B=1 \Rightarrow B=\frac{1}{6} \;\; A=-\frac{1}{6} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \int \frac{1}{(x-1)(x+5)}\,dx = \int \frac{1}{6(x-1)} - \frac{1}{6(x+5)}\,dx = \frac{1}{6}\Big(\ln|x-1| - \ln|x+5|\Big) + C =$$

$$= \frac{1}{6}\ln\left|\frac{x-1}{x+5}\right| \; + \; C$$

2

$$\int_1^X \frac{x}{(x^2+1)^2}\,dx = -\frac{1}{2(x^2+1)}\,\Big|_1^X =$$

Vi ser direkt att den första termen går mot noll då $X \to \infty$. Vilket ger

$$= \frac{1}{2} \;\; \Rightarrow \;\; \text{integralen konvergerar}$$

3

Låter vi $f(x) = \sqrt{x}\, e^{4x}$ rotera kring x-axeln kommer den skära ut en cirkelyta i z-planet som kommer ha f:s värde som dess radie. Vi tecknar uttrycket för arean som

$$A_{cirkel} = (\sqrt{x}\, e^{4x})^2 \pi$$

Ett litet volymselement kommer således ha volymen

$$A_{cirkel}\ dx = (\sqrt{x}\ e^{4x})^2\ \pi\ dx$$

Vi integrerar nu längs x-axeln för att få ut den sökta volymen

$$V = \int_0^1 A_{cirkel}\ dx = \int_0^1 (\sqrt{x}\ e^{4x})^2 \pi\ dx = \pi \int_0^1 x\ e^{8x}\ dx = \Big[\text{Partiell Integrering}\Big] =$$

$$= \pi\left(\frac{xe^{8x}}{8}\ \Big|_0^1 - \frac{1}{8}\int_0^1 e^{8x}\ dx \right) = \pi\left(\frac{e^8}{8} - \frac{1}{64}\ e^{8x}\ \Big|_0^1 \right) = \pi\left(\frac{8e^8}{64} - \frac{e^8 - 1}{64} \right) =$$

$$= \pi\ \frac{7e^8 + 1}{64}\ v.e.$$