KTH Matematik
Hans Thunberg

5B1142 Envariabelanalys och Linjär Algebra
HT 2005 för Öppen Ingång

Lösningsförslag till modelltentamen

Tentamen består av två delar.

Den första delen utgörs av fyra uppgifter som svarar mot kursens fyra moduler. Du ska bara räkna de uppgifter som motsvarar de moduler som du inte har klarat under kursens gång. Varje uppgift ger maximalt fyra poäng, och för att bli godkänd på en modul krävs minst tre poäng på motsvarande uppgift.

Den andra delen består av fem uppgifter som ger vardera ger maximalt 4 poäng.

För full poäng på en uppgift krävs en fullständig och väl strukturerad och motiverad lösning.

Följande betygsgränser är preliminära och kan komma att justeras något.

- För betyg E och 3: Godkänt på modul 1-4 samt minst 5 poäng på del 2
- För betyg D och 3: Godkänt på modul 1-4 samt minst 7 poäng på del 2
- För betyg C och 4: Godkänt på modul 1-4 samt minst 10 poäng på del 2
- För betyg B och 4: Godkänt på modul 1-4 samt minst 12 poäng på del 2
- För betyg A och 5: Godkänt på modul 1-4 samt minst 15 poäng på del 2

Lycka till!

Del 1

(1) Skissera grafen till funktionen $f(x) = \dfrac{x^2+1}{x^2-1}$ och ange alla relevanta gränsvärden och asymptoter.

LÖSNING: Funktionens definitionsmängd är $\mathbb{R} - \{\pm 1\}$, dessutom är funktionen jämn så det räcker till att granska funktionen för positiva reella tal. För $x \to 1^-$ går $f(x) \to -\infty$, för $x \to 1^+$ däremot $f(x) \to \infty$. Pga symmetrien gäller $f(x) \to \infty$ för $x \to -1^-$ och $f(x) \to -\infty$ för $x \to -1^+$. För alla övriga reella tal är funktionen kontinuerlig så det återstår att granska funktionen där x går mot oändligheten:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x^2+1}{x^2-1} \overset{symm.}{=} \lim_{x\to-\infty} \frac{x^2+1}{x^2-1} = 1$$

Vi har alltså två lodräta asymptoter: $x = -1$ och $x = 1$ och en horisontell asymptot $y = 1$.

Vi beräknar derivatan

$$f'(x) = \frac{-4x}{(x^2-1)^2}$$

och genom teckenstudier ser vi att f är växande för $x < 0$, och avtagande för $x > 0$, med ett lokalt maximum i $x = 0$, med $f(0) = -1$. Funktionen har inga andra lokala extrempunkter.

(2) Är det sant att

$$\frac{\sqrt{3}}{3} \leq \int_1^2 \frac{x}{\sqrt{x+1}}\, dx \leq \sqrt{2} \quad ?$$

<u>LÖSNING:</u> Första derivatan ger

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \frac{x}{\sqrt{x+1}} = \frac{1}{2\sqrt{x+1}} \left(\frac{x+2}{x+1} \right) > 0.$$

Funktionen $f(x) := \frac{x}{\sqrt{x+1}}$ är alltså monotont växande på det betraktade intervallet. Därmed gäller olikheterna

$$f(1) \leq \int_1^2 \frac{x}{\sqrt{x+1}}\, dx \leq f(2)$$

Med insatta värden

$$\frac{\sqrt{3}}{3} \leq \frac{1}{\sqrt{2}} \leq \int_1^2 \frac{x}{\sqrt{x+1}}\, dx \leq \frac{2}{\sqrt{3}} \leq \sqrt{2}.$$

Således

$$\frac{\sqrt{3}}{3} \leq \int_1^2 \frac{x}{\sqrt{x+1}}\, dx \leq \sqrt{2}.$$

(3) Avgör om $\sum_{n=2}^{\infty} \dfrac{1}{n \ln n}$ är konvergent eller divergent.

<u>LÖSNING:</u> Funktionen $f(x) = \dfrac{1}{x \ln x}$ är monotont avtagande. Enligt CAUCHYs integralkriterium konvergerar serien om och endast om den generaliserade integralen

$$\int_2^{\infty} \frac{1}{x \ln x}\, \mathrm{d}x$$

konvergerar. Men

$$\int_2^{\infty} \frac{1}{x \ln x}\, \mathrm{d}x = \int_2^{\infty} \frac{(\ln x)'}{\ln x}\, \mathrm{d}x = \lim_{A \to \infty} [\ln(\ln x)]_2^A = \infty.$$

Eftersom den generaliserade integralen divergerar, divergerar också serien.

(4) Bestäm en funktion $y = y(x)$ som uppfyller

$$\begin{cases} y' = x^2 - x^2 y \\ y(0) = 0 \end{cases}$$

<u>LÖSNING:</u> Detta begynnelsevärdeproblem har seperabla variabler. Vi skriver

$$\frac{\mathrm{d}y}{1-y} = x^2\,\mathrm{d}x, \quad y \neq 1.$$

Detta är ekvivalent med

$$-\ln|1-y| = \int x^2\,\mathrm{d}x = \frac{1}{3}x^3 + C.$$

Vi löser ut y och får

$$y = 1 + Ae^{-\frac{1}{3}x^3}.$$

Begynnelsevärdet $y(0) = 0$ ger $A = -1$ och således

$$y = 1 - e^{-\frac{1}{3}x^3}.$$

Del 2

(5) Om funktionen $f(x)$ vet man att $\lim_{x\to 0+} = 0$, $\lim_{x\to 0-} = +\infty$, $\lim_{x\to -\infty} = 1$ och att $y = x + 3$ är en asymptot till kurvan $y = f(x)$ då $x \to \infty$. Dessutom vet man att f är deriverbar för alla $x \neq 0$ och att $f'(x)$ är en positiv funktion.

(a) Skissera ett exempel på en graf $y = f(x)$ som uppfyller dessa villkor.

<u>SKISS:</u>

(b) Kan f vara inverterbar?

<u>LÖSNING:</u> Då funktionens derivatan är en positiv funktion, är $f(x)$ monotont växande, dessutom deriverbar för alla $x \neq 0$, alltså kontinuerlig. Detta betyder att funktionen avbilder $\mathbb{R}_{<0} \to (1, \infty)$ och $\mathbb{R}_{\geq 0} \to [0, \infty)$, ty $x + 3$ är en asymptot. Det innebär att alla värden $y > 1$ antas för två olika x-värden. Funktionen är således inte injektiv och saknar därmed en invers.

(6) Bestäm tangentlinjen till $f(x) = \arctan(2x + \sqrt{3})$ i den punkt där kurvan skär y-axeln.

LÖSNING: Skärningspunkten ges av $(0, f(0))$ och tangentlinjen enligt formeln

$$y = f'(0)x + f(0).$$

$f'(x) = \dfrac{2}{1 + (2x + \sqrt{3})^2}$, alltså $f'(0) = 1/2$.
$f(0) = \arctan(\sqrt{3}) = \pi/3$.
Tangentlinjens ekvations ges därmed av $y = \frac{1}{2}x + \frac{\pi}{3}$.

(7) Beräkna längden av kurvan $y = \ln \cos x$, $\pi/6 \leq x \leq \pi/4$.

LÖSNING:

$$L(y) = \int_{\pi/6}^{\pi/4} \mathrm{d}x \sqrt{1 + \frac{\sin^2(x)}{\cos^2(x)}} = \int_{\pi/6}^{\pi/4} \frac{\mathrm{d}x}{\cos(x)} = \dots$$

$\tan \frac{x}{2}$–substitution leder då till ($\tan \frac{\pi}{12} = 2 - \sqrt{3}$, $\tan \frac{\pi}{8} = \sqrt{2} - 1$)

$$\begin{aligned}
\dots &= \int_{2-\sqrt{3}}^{\sqrt{2}-1} \mathrm{d}t \, \frac{2}{1+t^2} \, \frac{1+t^2}{1-t^2} \\
&= \int_{2-\sqrt{3}}^{\sqrt{2}-1} \frac{2\mathrm{d}t}{1-t^2} = \int_{2-\sqrt{3}}^{\sqrt{2}-1} \frac{1}{1+t} + \frac{1}{1-t} \, \mathrm{d}t \\
&= \left[\ln \left| \frac{1+t}{1-t} \right| \right]_{2-\sqrt{3}}^{\sqrt{2}-1} = -\ln\left(\sqrt{3}\left(\sqrt{2}-1\right)\right)
\end{aligned}$$

OBS: Denna uppgift blev lite svårare än avsett. $\tan \frac{x}{2}$–substitution är inte standardkunskap i denna kurs, och beräkningarna av $\tan \frac{\pi}{12} = 2 - \sqrt{3}$, $\tan \frac{\pi}{8} = \sqrt{2} - 1$ kräver härledning av följande trigonometriska samband

$$\tan \frac{x}{2} = \frac{\sin x}{1 + \cos x}$$

som inte förväntas vara känt.

(8) Planet S går igenom punkterna $P(1,2,2)$, $Q(4,2,-1)$ och $R(3,0,0)$. Genom P går också linjen L som bestäms av att den även passerar genom punkten $O(0,1,2)$. Bestäm vinklen mellan planet S och linjen L.

LÖSNING: Vinkeln mellan planet och linjen bestäms av $\pi/2 - \alpha$, där α är vinkeln mellan linjen och planets normalen. Planets två riktningsvektorer är

$$\mathbf{u} = (3,0,-3) \text{ och } \mathbf{v} = (2,-2,-2).$$

Kryssprodukten mellan $\mathbf{u}$ och $\mathbf{v}$ ger oss planets normal:

$$\mathbf{n} := \mathbf{u} \times \mathbf{v} = (-6,0,-6).$$

Linjens rikningsvektor ges av $\mathbf{w} = (-1,-1,0)$. Vinkeln mellan de två vektorerna ges av

$$\cos(\alpha) = \frac{<\mathbf{n},\mathbf{w}>}{\|\mathbf{n}\|\ \|\mathbf{w}\|} = \frac{1}{2},$$

$\Rightarrow \alpha = \pi/3 \Rightarrow$ vinkeln mellan plan och linje

$$\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{6}.$$

(9) Härled tredje ordningens MacLaurin-polynom till funktionen

$$F(x) = \int_0^x e^{-t^2}\,dt$$

LÖSNING: MacLaurin utveckling:

$$F(x) = F(0) + F'(0)x + \frac{F''(0)}{2}x^2 + \frac{F^{(3)}(0)}{3!}x^3 + \mathcal{O}(x^4).$$

Vi beräknar derivatorna:

$$\begin{array}{lll}
F(0) & = \int_0^0 e^{-t^2}\,dt & = 0 \\
F'(0) & = e^{-x^2}\Big|_{x=0} & = 1 \\
F''(0) & = -2xe^{-x^2}\Big|_{x=0} & = 0 \\
F^{(3)}(0) & = -2e^{-x^2} + 4x^2e^{-x^2}\Big|_{x=0} & = -2 \\
(F^{(4)}(0) = 0) & &
\end{array}$$

Insättning ger tredje ordningens MacLaurin-polynom

$$x - \frac{1}{3}x^3 + \mathcal{O}(x^5).$$

(Alternativt kan man utgå från MacLaurinutvecklingen av e^x, substituera $x = -t^2$ och sedan integrera från 0 till x.)